

# Dynamische Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien

Für den Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie  
an der Technischen Universität Darmstadt

zur  
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

**D i s s e r t a t i o n**

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Ingmar Wendling  
aus Gießen

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. M. Oberlack
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. Janicka
Tag der Einreichung:	28.08.2006
Tag der mündlichen Prüfung:	26.01.2007

Darmstadt, Januar 2007

**D17**



# Vorwort

Diese Arbeit entstand in den Jahren 2003 bis 2006 während meiner Tätigkeit am Fachgebiet Strömungsdynamik des Fachbereichs Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt als Stipendiat im Graduiertenkolleg "Modellierung, Simulation und Optimierung von Ingenieur Anwendungen".

Dem Leiter des Fachgebietes, Herrn Professor Dr.-Ing. habil. M. Oberlack, danke ich für die Möglichkeit zur Promotion. Seine wertvollen Anregungen und Diskussionen haben erheblich zu dieser Arbeit beigetragen. Herrn Professor Dr.-Ing. J. Janicka danke ich für die Übernahme des Korreferates und seine ständige Diskussionsbereitschaft.

Alle Kollegen am Fachgebiet standen mir immer mit Rat und Tat zur Verfügung. Meiner Zimmerkollegin Susanne Kraft danke ich für fruchtbare Diskussionen in wissenschaftlicher und jeglicher anderen Hinsicht. Ein weiterer Dank gilt der FASTEST-Gruppe, die oft helfen konnte den "Quell-Code-Dschungel" von FASTEST etwas zu lichten.

Bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern, die mir zunächst das Studium ermöglicht haben, und mich während meiner Promotion unterstützt haben.

Besonderer Dank gilt meiner Frau Catherine, die mich bestens motiviert, unterstützt und ertragen hat. Entschuldigen möchte ich mich hier bei meinem Sohn Ben, dass "Papa" nicht so oft zu Hause sein konnte, wie er das gerne gewollt hätte.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung . . . . .	2
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Turbulenzmodellierung</b>	<b>5</b>
2.1 Turbulenz . . . . .	5
2.2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik . . . . .	7
2.3 Ansätze der Turbulenzmodellierung . . . . .	8
2.3.1 Direkte numerische Simulation - DNS . . . . .	8
2.3.2 Statistische Turbulenzmodellierung - RANS . . . . .	9
2.3.3 Large-Eddy Simulation - LES . . . . .	11
2.4 Modellierungsprinzipien . . . . .	12
2.4.1 Realizability . . . . .	13
2.4.2 Symmetriemethoden . . . . .	14
<b>3 Elemente der Large-Eddy Simulation</b>	<b>17</b>
3.1 Filterung . . . . .	17
3.2 Grundgleichungen der LES . . . . .	19
3.3 Commutation Error . . . . .	21
3.4 Feinstrukturmodelle . . . . .	22
3.4.1 Smagorinsky-Modell . . . . .	23
3.4.2 Scale Similarity Modelle . . . . .	24
3.4.3 Approximate Deconvolution Modell . . . . .	25
3.4.4 Strukturfunktions-Modelle . . . . .	26
3.4.5 Mehrgleichungsmodelle . . . . .	27
3.5 Dynamische Feinstrukturmodellierung . . . . .	28
3.5.1 Ansatz nach Germano und Lilly . . . . .	28
3.5.2 Alternative Ansätze . . . . .	31
3.5.2.1 Lagranges Modell . . . . .	31
3.5.2.2 Localization Model . . . . .	31
3.6 Herleitung und Analyse weiterer Feinstrukturmodelle . . . . .	32
3.6.1 Ensemble Averaged Dynamic Procedure (EADP) . . . . .	32
3.6.2 Energietransfer-Gleichgewichtsmodell . . . . .	33
3.6.3 Nichtlineares dynamisches Modell nach Lund und Novikov . .	34
<b>4 Numerische Diskretisierung</b>	<b>39</b>

4.1	Finite Volumen Methode . . . . .	39
4.2	Diskretisierung . . . . .	40
4.2.1	Approximation der Oberflächenintegrale . . . . .	42
4.2.2	Approximation der Volumenintegrale . . . . .	43
4.2.3	Zeitliche Diskretisierung . . . . .	44
4.2.4	Druck-Korrektur-Verfahren . . . . .	44
4.3	Lösungsverfahren . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Large-Eddy Simulation ausgewählter turbulenter Strömungen</b>	<b>47</b>
5.1	Turbulente, ebene Kanalströmung . . . . .	47
5.1.1	Beschreibung des Testfalls . . . . .	47
5.1.1.1	Rand- und Anfangsbedingungen . . . . .	48
5.1.2	Einfluss der Gitterauflösung . . . . .	49
5.1.3	Einfluss des Germano-Modells . . . . .	51
5.1.4	Ensemble Averaged Dynamic Procedure . . . . .	52
5.1.5	Energietransfer-Gleichgewichtsmodell . . . . .	57
5.1.6	Nichtlineares dynamisches Modell nach Lund und Novikov . .	60
5.1.6.1	Einzelterm-Modelle . . . . .	60
5.1.6.2	Doppelterm-Modelle . . . . .	63
5.2	Überströmung einer zurückspringenden Stufe . . . . .	66
5.2.1	Beschreibung des Testfalls . . . . .	66
5.2.2	Beschreibung der experimentellen Daten . . . . .	66
5.2.3	Rechengebiet und Gitterauflösung der Simulationen . . . . .	67
5.2.4	Rand- und Anfangsbedingungen der Simulationen . . . . .	69
5.2.5	Vergleich der Doppelterm-Modelle mit dem Germano-Modell .	70
5.3	Turbulente Umströmung eines Würfels in einem ebenen Kanal . . . .	76
5.3.1	Beschreibung des Testfalls . . . . .	76
5.3.2	Beschreibung der experimentellen Daten . . . . .	77
5.3.3	Rechengebiet und Gitterauflösung der Simulationen . . . . .	77
5.3.4	Rand- und Anfangsbedingungen der Simulationen . . . . .	78
5.3.5	Vergleich der Doppelterm-Modelle mit dem Germano-Modell .	80
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>97</b>

# Nomenklatur

$\alpha_{ij}$	Feinstrukturmodell ohne Konstante
$\delta^n$	Korrekturvektor
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$\Delta$	Filterweite
$\delta$	halber Plattenabstand in der Kanalströmung
$\delta_{ij}$	Kronecker Delta
$\dot{m}$	Massenfluss
$\varepsilon$	Filterparameter
$\eta$	Kolmogorov-Längenmaß
$\frac{\partial u_i}{\partial \chi} _{out}$	Gradient normal zum Ausstromrand
$\Gamma_\psi$	Transportkoeffizient der Größe $\psi$
$\gamma_e$	Interpolationsfaktor
$\mathbf{L}$	untere Dreieckmatrix nach LU-Zerlegung
$\mathbf{r}^n$	Residuenvektor
$\mathbf{r}_L^n$	Residuenvektor
$\mathbf{U}$	obere Dreieckmatrix nach LU-Zerlegung
$\nu$	kinematische Viskosität
$\nu_\tau$	turbulente Viskosität
$\nu_{eff}$	effektive Viskosität
$\psi$	physikalische Feldgröße
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Oberfläche eines Volumen
$\sigma$	Standardabweichung
$\tau_\eta$	Kolmogorov-Zeitmaß
$\tau_w$	Wandschubspannung
$\tau_{ij}$	Feinstrukturspannungstensor
$\tau_{ij}^*$	spurfreier Feinstrukturspannungstensor
$\varepsilon$	Dissipationsrate

$\varepsilon_g$	Dissipationsrate des gittergefilterten Spektrums
$\varepsilon_t$	Dissipationsrate des testgefilterten Spektrums
$\varepsilon_{sgs}$	Dissipationsrate der Feinstrukturen
$A_P$	Koeffizienten im Kontrollvolumen P
$a_{i,Nb}$	Koeffizient der benachbarten Kontrollvolumen
$a_{i,P}$	Koeffizient im Kontrollvolumen P
$A_{Nb}$	Koeffizienten der benachbarten Kontrollvolumen
$C$	Modellkonstante
$C_B$	Bardina-Konstante
$C_s$	Smagorinsky-Konstante
$C_{ij}$	Kreuzspannungstensor
$D$	Rohrdurchmesser
$DNS$	Direkte Numerische Simulation
$E(k)$	Energiespektrum in Abhängigkeit von der Wellenzahl
$E_{ij}$	Feinstrukturfehler
$EADP$	Ensemble Averaged Dynamic Procedure
$EGM$	Energietransfer-Gleichgewichtsmodell
$f_i$	Kraft in i-Richtung
$G(x_i, x'_i)$	Filterfunktion
$I$	Identitätsoperator
$k$	Wellenzahl
$k$	turbulente kinetische Energie
$k^{sgs}$	Feinstrukturenergie
$k_{\text{cut-off}}$	Cut-Off-Wellenzahl
$l$	Längenmaß
$l_0$	Referenzlängenmaß
$L_{ij}$	Germano-Identität
$L_{ij}$	Leonard-Spannungstensor
$LES$	Large-Eddy Simulation
$n_i$	Komponente des Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}$
$P$	Druck geteilt durch Dichte
$p$	Druck
$Q_N$	approximierter, invertierter Filter



$R$	Anzahl an Realisationen
$R_{ij}$	Feinstruktur-Reynolds-Spannungstensor
$R_{ij}$	Korrelationskoeffizient
$R_{ij}$	Rotationstensor
$RANS$	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
$Re$	Reynoldszahl
$Re_{\tau}$	Reynoldszahl bezogen auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$Re_{krit}$	kritische Reynoldszahl
$S_{\psi}$	Summe der Quell- und Senkenterme der Größe $\psi$
$S_P$	Quellterm im Kontrollvolumen P
$S_{ij}$	Scherspannungstensor
$t$	Zeit
$t^*$	dimensionslose Zeit
$t_s$	Zeit von Beginn bis Ende der statistischen Auswertung
$t_t$	Zeit von Simulationsbeginn bis Beginn der statistischen Auswertung
$T_{ij}$	Spannungstensor
$U$	mittlere Geschwindigkeit
$u_0$	Referenzgeschwindigkeit
$u_{\tau}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$U_b$	über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit
$U_c$	mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung in der mittleren Ebene der Kanalströmung
$u_i$	Geschwindigkeitskomponente in i-Richtung
$U_{conv}$	mittlere Konvektionsgeschwindigkeit in Richtung des Ausstromrandes
$V$	Volumen
$x_i$	kartesische Koordinate
$x_R$	mittlere Wideranlegelänge
$x_{RF}$	mittlere Wideranlegelänge vor dem Hindernis
$x_{RR}$	mittlere Wideranlegelänge hinter dem Hindernis
$x_{RT}$	mittlere Wideranlegelänge über dem Hindernis
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Turbulente Strömungen begegnen uns überall im täglichen Leben, ob es die Turbulenz in der Kaffeetasse ist, die beim Umrühren entsteht, oder der aufsteigende Rauch über einem Streichholz, der nach einer bestimmten Lauflänge ungeordnete Strukturen annimmt. Die Turbulenz bestimmt auch unser Wetter durch ihre Auswirkungen auf die Strömungen in der Atmosphäre der Erde.

Nahezu alle Strömungen in technischen Anwendungen sind turbulent, und ihre korrekte Beschreibung ist von enormer Bedeutung für Ingenieure verschiedener Fachbereiche, z.B. in der Aerodynamik um Strömungswiderstände zu minimieren, in der Kraftwerkstechnik um eine effiziente Verbrennung zu gewährleisten, oder im Umweltschutz um Schadstoffausbreitungen in Wasser oder Luft vorhersagen zu können. In der Klimatechnik können hierdurch Aussagen über die Effizienz von Klimaanlage bzw. deren Auswirkungen auf die Temperaturverteilung oder die Stärke des Luftzugs in Gebäuden getroffen werden. Bauingenieure können Aussagen über Auswirkungen von Wind auf Gebäude, wie z.B. Hochbauten oder Brücken treffen. Diese Auswahl stellt nur einen geringen Teil des Anwendungsbereichs der Strömungsmechanik dar.

Die mathematischen Grundgleichungen zur Beschreibung turbulenter Strömungen wurden bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts (1827 bzw. 1845) unabhängig voneinander von dem französischen Ingenieur Claude L. M. H. Navier und dem irischen Mathematiker George G. Stokes aufgestellt. Die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen können aufgrund ihrer Nichtlinearität nur für einfache Geometrien unter bestimmten Annahmen analytisch gelöst werden. Untersuchungen von komplexen Strömungskonfigurationen waren lange Zeit auf messtechnische Experimente beschränkt. Mit Eintritt in das Computerzeitalter war die Möglichkeit für numerische Simulationen von turbulenten Strömungen gegeben. Wegen geringer Computerressourcen wurden in der Vergangenheit diese Simulationen mittels der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) durchgeführt, d.h. die Turbulenz wird komplett herausgemittelt und ihr Einfluss auf die Strömung durch ein Modell berücksichtigt. Durch den hohen Modellierungsgrad sind diese Berechnungen zum Teil großen Fehlern unterworfen, und es ist in diesem Kontext kein allgemeingültiges Modell bekannt. Auch wenn heutzutage numerische Simulationen viele teure experimentelle Untersuchungen ersetzen, kann wegen diesen Ungenauigkeiten nicht ganz auf Experimente verzichtet werden.

Durch steigende Rechengeschwindigkeiten ist es seit einiger Zeit möglich die turbulenten Strukturen in einer Direkten Numerischen Simulation (DNS) direkt zu berechnen. Ein Modell kommt bei diesem Ansatz nicht zum Einsatz. Die Ergebnisse

weisen nur noch Fehler durch die Diskretisierung der Gleichungen auf. Der Rechenaufwand ist jedoch so immens, dass selbst in absehbarer Zukunft diese Methode auf Strömungen mit geringer turbulenter Intensität beschränkt bleibt. So sei, laut Breuer (2001), bei konstanter Weiterentwicklung der Computer (Verdopplung der Rechengeschwindigkeit alle 1,5 Jahre) eine DNS eines Verkehrsflugzeugs frühestens in 50 Jahren möglich und selbst dann wäre die Rechendauer erheblich. Es wäre eine Rechenleistung notwendig, die etwa  $10^{10}$  schneller ist als die Leistung von heutigen Supercomputern. Aus diesen Gründen wird das Aufgabengebiet der DNS vorerst die Grundlagenforschung zum besseren Verständnis der Turbulenz bleiben.

Als ein Ausweg wird die Large-Eddy Simulation (LES) angesehen. Die LES wird oft als goldener Mittelweg bezeichnet. Nach diesem Ansatz werden nur die großen turbulenten Strukturen berechnet und die kleinen modelliert. Wie sich in der Vergangenheit gezeigt hat, sind die Ergebnisse von LES unabhängig vom eingesetzten Modell tendenziell richtig, und es kommt nicht zu einem totalen Versagen wie es bei RANS-Simulationen möglich ist. So wird allgemein angenommen, dass sich der Einsatz dieser Technik durchsetzen wird. In Zukunft werden LES genutzt, um die Vorhersagefähigkeit von RANS-Modellen abzuschätzen, sowie um technische Strömungen zu berechnen. Heutzutage ist der Einsatz der LES aufgrund des hohen Rechenaufwands nur auf parallelisierten Hochleistungsrechnern wirtschaftlich. Außerdem gibt es bei dieser Technik noch erheblichen Forschungsbedarf.

In den sechziger Jahren wurde die LES erstmals von Smagorinsky (1963) zur Simulation von meteorologischen Vorgängen vorgeschlagen. Seither ist auf dem Gebiet der Modellbildung zur LES viel geforscht und etliche Modelle entwickelt worden. Trotzdem ist das nach ihm benannte Smagorinsky-Modell bis heute eines der am häufigsten verwendeten Modelle. Die Konstante des Modells ist jedoch nicht universell und muss an die jeweiligen Strömungskonfigurationen angepasst werden. Gänzlich versagt die Konstante bei wandgebundenen Strömungen und muss zur Wand hin gedämpft werden.

Einen regelrechten Schub bekam die LES durch die Entwicklung einer Prozedur zur Bestimmung einer Modellkonstanten während der Berechnung durch Germano *et al.* (1991). Diese dynamische Prozedur, in Verbindung mit dem Smagorinsky-Modell als Germano-Modell bekannt, führt jedoch zu einer stark schwankenden Konstante, die zu numerischen Instabilitäten führt. Der Einsatz der Prozedur ist nur mit Hilfsmitteln, wie z.B. diverse Arten der Mittelung, anwendbar.

## 1.2 Zielsetzung

Für den Ingenieur ist die Berechnung von technischen Strömungen notwendig. Die Geometrien dieser Strömungen sind in der Regel hochgradig komplex. Dies führt zu komplexen Eigenschaften der Strömungen und hohen Anforderungen an das Turbulenzmodell.

Bisher beschränkte sich der Anwendungsbereich der LES auf einfache Testfälle. Zur Entwicklung und Evaluierung von neuen Modellen wurden in der Regel isotrope Turbulenz, Scherströmungen oder ebene Kanalströmungen herangezogen. Für diese Testfälle ist der Einsatz des Germano-Modells durch Mittelung über homogene Richtungen möglich.

Erst in den letzten Jahren wurde der Ansatz der LES dazu verwendet komplexe Strömungskonfigurationen zu berechnen. In diesen Simulationen wird meist auf den Einsatz von dynamischen Modellen verzichtet.

Gerade für solche Konfigurationen, in denen die nichtuniverselle Konstante räumlich und möglicherweise auch zeitlich variieren, führt eine dynamische Bestimmung der Konstanten zu einer deutlichen Verbesserung der Vorhersagefähigkeit der Simulation. Das Germano-Modell ist hier nur eingeschränkt anwendbar und Weiterentwicklungen führen meist zu deutlich erhöhtem numerischen Aufwand.

Primäres Ziel dieser Arbeit ist es dynamische Prozeduren für komplexe Strömungskonfigurationen anwendbar zu machen. Hierzu werden verschiedene Lösungsansätze verfolgt. Zum einen werden herkömmliche Prozeduren betrachtet und angewendet. Zum anderen werden Ansätze zur Formulierung neuer dynamischer Prozeduren betrachtet. Weiterhin wird die Verwendung herkömmlicher dynamischer Prozeduren mit anderen Modellen untersucht und analysiert. Um die Güte der Ansätze zu bestimmen, werden ausgesuchte turbulente Strömungen simuliert und ausgewertet.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden die strömungsmechanischen Grundlagen erläutert. Es werden die Eigenschaften von Turbulenz und die mathematischen Grundgleichungen dargestellt. Ein grober Überblick über die Modellierungsansätze der statistischen Turbulenzsimulation und der direkten numerischen Simulation wird gegeben.

Der Ansatz der LES wird in Kapitel 3 ausführlich behandelt. Die Elemente der LES umfassen die Filterung der Grundgleichungen und die Modellierung der Feinstruktur. Auf die dynamische Feinstrukturmodellierung, die ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist, wird ausführlich eingegangen. Die verwendeten Feinstrukturmodelle und die eigenen Weiterentwicklungen werden hier beschrieben.

Kapitel 4 befasst sich mit der Diskretisierung der mathematischen Gleichungen mittels der Finite-Volumen-Methode, wie sie in dem verwendeten Programm Fastest-3D realisiert ist.

Zur Evaluierung der verwendeten Feinstrukturmodelle bzw. dynamischen Prozeduren werden drei verschiedene, turbulente Strömungen simuliert. Diese sind die voll entwickelte turbulente Kanalströmung, die Überströmung einer zurückspringenden Stufe und die Umströmung eines Würfels in einem Kanal. Kapitel 5 stellt die Ergebnisse dieser Berechnungen vor.

Abgeschlossen wird die Arbeit in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Verbesserungen im Hinblick auf Feinstrukturmodellierung und dynamische Prozeduren zur Anwendung in komplexen Geometrien.

## 2 Turbulenzmodellierung

### 2.1 Turbulenz

Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional, instationär, diffusiv, dissipativ, wirbelbehaftet und nicht lokal. Der Übergang von der geordneten, gleichmäßigen laminaren Strömung zur scheinbar ungeordneten, stochastischen turbulenten Strömung wird durch die Reynoldszahl  $Re$  charakterisiert:

$$Re = \frac{l_0 u_0}{\nu}. \quad (2.1)$$

Hier sind  $l_0$  und  $u_0$  Referenzgrößen für ein Längenmaß und eine Geschwindigkeit,  $\nu$  ist die kinematische Viskosität. Für jede Strömung können unterschiedliche Referenzgrößen bestimmt werden. Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften. Bei kleinen Reynoldszahlen überwiegen die Reibungskräfte, eventuelle Störungen werden gedämpft, und es kann eine stabile laminare Strömung erhalten bleiben. Bei höheren Reynoldszahlen überwiegen die Trägheitskräfte. Auftretende Störungen werden nicht mehr gedämpft sondern angefacht. Es entsteht eine turbulente Strömung. Für das Umschlagen einer laminaren in eine turbulente Strömung kann keine genaue Reynoldszahl angegeben werden. Für Rohrströmungen z.B. ist die kritische Reynoldszahl

$$Re_{krit} = \frac{DU}{\nu} \approx 2300, \quad (2.2)$$

bezogen auf den Rohrdurchmesser  $D$  und die mittlere Geschwindigkeit im Rohr  $U$ . In experimentellen Versuchen konnte jedoch durch sorgfältig beruhigte Zuströmung laminares Fließen bis zu  $Re_{krit} \approx 50.000$  erreicht werden (Bollrich 2000).

Turbulente Strömungen setzen sich aus Wirbelstrukturen verschiedener Größenordnungen zusammen. Die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie auf die verschiedenen Größenordnungen bzw. die entsprechenden Wellenzahlen  $k$  wird durch das Energiespektrum wiedergegeben. Das Energiespektrum einer vollentwickelten turbulenten Strömung ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Es ergibt sich durch eine Fouriertransformation der Geschwindigkeiten einer in diesem Fall homogenen und isotropen Strömung.

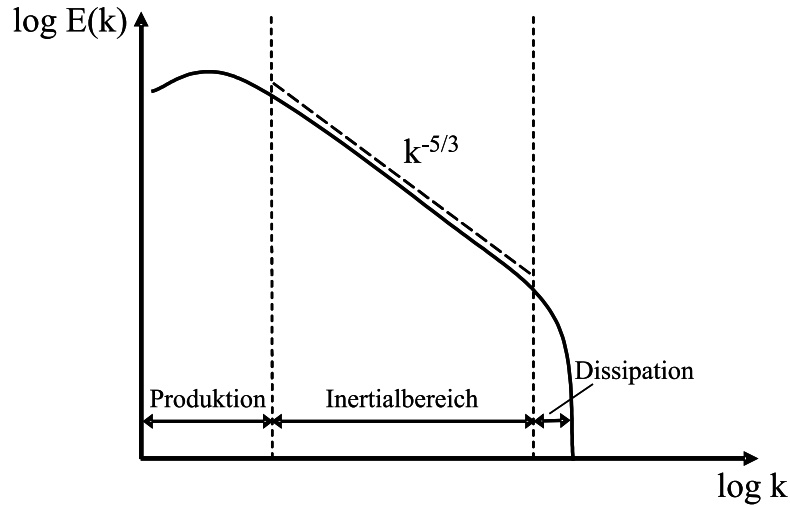


Abbildung 2.1: Energiespektrum einer turbulenten Strömung

Die größten Wirbel, welche die charakteristische Abmessung des durchströmten bzw. umströmten Körpers besitzen, sind energiereich. Nach der Modellvorstellung der Wirbel- bzw. Energiekaskade von Richardson (1922) zerfallen die großen Wirbel in kleinere und geben somit Energie an diese kleineren Wirbel ab. Im Inertialbereich erfolgt der Energietransfer alleine durch die Wirkung der Trägheitskräfte. Das Energiespektrum ist in diesem Bereich proportional zu  $k^{-5/3}$ . In den kleinsten Wirbeln dissipiert die Energie durch die Wirkung der viskosen Kräfte in Wärme. Örtlich und zeitlich begrenzt kann auch ein Energietransfer von kleinen zu größeren Skalen auftreten. Aufgrund dieses "Backscatter-Effekts" gilt die Modellvorstellung der Energiekaskade nur für die Netto-Energiebilanz. Leslie & Quarini (1979) schätzen den Anteil der zurückfließenden Energie auf etwa ein Drittel der an kleinere Skalen abgegebenen Energie. Diese Abschätzung wird durch die Arbeiten von Carati, Ghosal & Moin (1995) und Mason & Thomson (1992) bestätigt.

Während die Größe der größten Strukturen durch die durch- oder umströmte Geometrie vorgegeben ist, kann das kleinste Längenmaß  $\eta$  eines turbulenten Feldes nach den Thesen von Kolmogorov (1941a, 1941b) aus einer Dimensionsanalyse zu

$$\eta = \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.3)$$

bestimmt werden.  $\varepsilon$  stellt die Dissipationsrate dar. Das korrespondierende kleinste Zeitmaß  $\tau_\eta$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\tau_\eta = \left( \frac{v}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Diese kleinsten Skalen, welche die kleinsten auftretenden, dissipativen Wirbel repräsentieren, werden Kolmogorov-Skalen genannt.



## 2.2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Die grundlegenden Gleichungen zur Beschreibung von Strömungen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.6)$$

Hier bezeichnet  $t$  die Zeit,  $x_i$  die kartesischen Koordinaten,  $\rho$  die Dichte,  $u_i$  die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Koordinate  $i$ ,  $p$  den Druck und  $f_i$  die Summe der äußeren Kräfte in Richtung  $i$ . Die Einsteinsche Summenkonvention wird hier und im folgenden auf doppelt auftretende Indizes angewendet. Nach der Hypothese von Stokes kann der Spannungstensor  $T_{ij}$  für ein Newtonsches Fluid wie folgt dargestellt werden:

$$T_{ij} = \rho \nu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \rho \nu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Das Kronecker Delta  $\delta_{ij}$  ist für gleiche Indizes 1, für ungleiche Null. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur inkompressible Fluide betrachtet. Die notwendigen Annahmen für Inkompressibilität sind eine niedrige Mach-Zahl und vernachlässigbare Temperaturschwankungen (Spurk 1996). Da für inkompressible Fluide die Dichte als konstant angenommen wird, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (2.5) zu:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

Somit verschwindet der zweite Term von Gleichung (2.7), und diese Gleichung eingesetzt in die Impulserhaltungsgleichung (2.6) führt zu den Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij}) + f_i, \quad (2.9)$$

wobei  $P$  der Druck geteilt durch die Dichte ist. Der Scherspannungstensor  $S_{ij}$  ist wie folgt definiert:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.10)$$

Damit bilden Gleichungen (2.8) und (2.9) ein geschlossenes Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten. Die Unbekannten sind der Druck und die drei Geschwindigkeitskomponenten. Mit diesem Gleichungssystem können turbulente Strömungen mathematisch vollständig beschrieben werden.

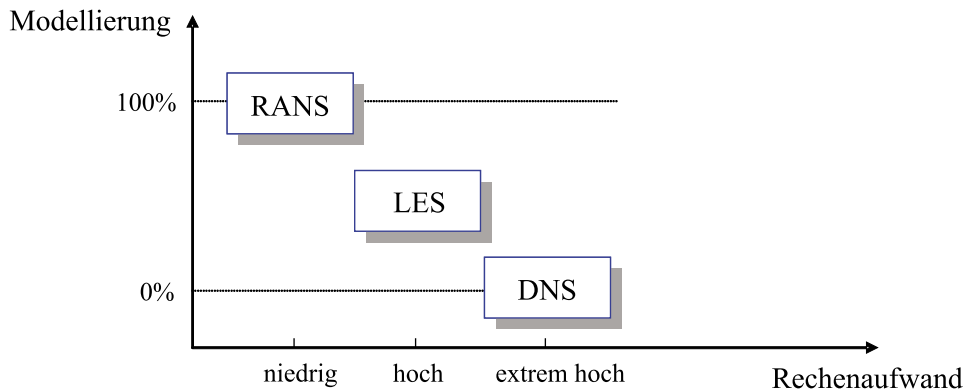


Abbildung 2.2: Vergleich der Modellierungsansätze

## 2.3 Ansätze der Turbulenzmodellierung

Um Strömungen numerisch zu berechnen, existieren drei unterschiedliche Ansätze. Bei der direkten numerischen Simulation (DNS) werden alle turbulenten Skalen durch das Rechengitter aufgelöst. Somit werden alle Effekte erfasst und es ist keine Modellierung notwendig. Allerdings ist für diese Art der Berechnung der Rechenaufwand extrem hoch. In der Large-Eddy Simulation (LES) werden die kleinsten Skalen durch das Gitter nicht aufgelöst. Es kann folglich mit einer gröberen Auflösung gerechnet werden. Die Effekte der kleinen dissipativen Wirbel müssen modelliert werden. Der Modellierungsgrad einer LES ist gering im Vergleich zur statistischen Turbulenzmodellierung (RANS). Der Rechenaufwand ist aber deutlich erhöht. Durch eine statistische Mittelung werden in der statistischen Turbulenzmodellierung alle turbulenten Skalen herausgemittelt. Die Turbulenz muss komplett modelliert werden. Dies führt zu wesentlich komplexeren Turbulenzmodellen. Einen Vergleich zwischen Modellierungsgrad und Rechenaufwand der verschiedenen Ansätze ist in Abbildung 2.2 illustriert. Der Unterschied dieser Ansätze wird in den errechneten Geschwindigkeiten deutlich. Abbildung 2.3 zeigt Geschwindigkeitssignale einer DNS, LES und einer RANS-Berechnung. Während bei der DNS auch kleinste Schwankungen sichtbar sind, weist das Signal der LES nur noch die groben Schwankungen auf. Bei RANS-Berechnungen sind keine Schwankungen vorhanden. Es wird nur ein Mittelwert ermittelt.

Desweiteren gibt es Mischformen dieser Ansätze, auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Im folgenden werden die drei Ansätze der Turbulenzmodellierung kurz erläutert. Auf die LES wird im Kapitel 3 noch genauer eingegangen.

### 2.3.1 Direkte numerische Simulation - DNS

In einer DNS müssen alle Skalen, auch die Kolmogorov-Skalen, durch das numerische Gitter aufgelöst werden. Dies erfordert eine extrem feine Auflösung, was wiederum einen immensen Rechenaufwand bedeutet. Allerdings ist in diesem Fall keine Modellierung notwendig.

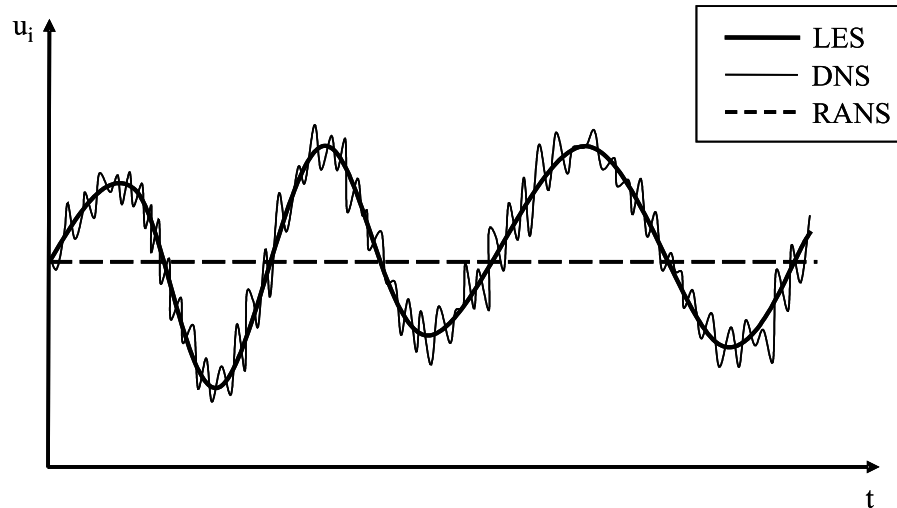


Abbildung 2.3: Vergleich der Geschwindigkeitssignale der verschiedenen Modellierungsansätze

Eine Erhöhung der Reynoldszahl sorgt für eine Aufweitung des Energiespektrums. Das Verhältnis der größten zu den kleinsten Längen- bzw. Zeitskalen lässt sich mit

$$\frac{l_0}{\eta} \sim Re^{\frac{3}{4}}, \quad (2.11)$$

$$\frac{t_0}{\tau_\eta} \sim Re^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

abschätzen. Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional, weshalb der numerische Aufwand mit  $Re^{11/4}$  steigt, da auch die Zeitschritte kleiner gewählt werden müssen.

Aus diesem Grund ist die DNS in absehbarer Zukunft für technische Strömungen nicht anwendbar. Heutzutage sind DNS bis  $Re \approx 10^4$  möglich. Die meisten technische Strömungen haben weitaus größere Reynoldszahlen. Demnach beschränkt sich das Einsatzgebiet auf einfache Strömungen mit geringen Reynoldszahlen.

Dem hohen Rechenaufwand steht die größte Genauigkeit der drei Methoden gegenüber. Es ist kein Modell notwendig, d.h. es tritt kein Modellfehler auf. Die einzige Fehlerquelle entsteht durch die Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen und die verwendeten numerischen Verfahren.

Aus diesen Gründen wird die DNS vorwiegend zur Grundlagenforschung eingesetzt. Ergebnisse dieser Simulationen haben in den letzten Jahren zum besseren Verständnis der Turbulenz beigetragen.

### 2.3.2 Statistische Turbulenzmodellierung - RANS

Die hydrodynamischen Feldgrößen  $\psi$ , also die Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  und der Druck  $p$ , sind in turbulenten Strömungen chaotisch verteilt, während die mittlere

Strömung dagegen ein "stabiles" Verhalten zeigt, das sich in Form von Differentialgleichungen für die Mittelwerte definieren und lösen lässt. Hierzu lassen sich die Feldgrößen  $\psi$  in einen Mittelwert  $\langle \psi \rangle$  und einen Schwankungswert  $\psi''$  zerlegen:

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i'', \quad p = \langle p \rangle + p'', \quad (2.13)$$

wobei der Mittelwert als Ensemble-Mittelwert definiert ist.

Die nach Reynolds benannte Mittelung führt, eingesetzt in die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9), zu den sogenannten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS):

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \langle S_{ij} \rangle) + f_i - \frac{\partial \langle u_i'' u_j'' \rangle}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

mit

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right). \quad (2.15)$$

Hier erscheint ein neuer Term korrelierter, fluktuierender Größen  $\langle u_i'' u_j'' \rangle$ , der als Reynoldsspannungstensor bezeichnet wird. Diese Spannungen repräsentieren den Impulsaustausch zwischen Fluidelementen aufgrund turbulenter Bewegung und können nicht direkt aus den gemittelten Impuls- und Massenerhaltungsgleichungen berechnet werden. Der Term muss semiempirisch modelliert werden, weil das Gleichungssystem hierdurch ungeschlossen ist. Dies wird auch als das Schließungsproblem der Turbulenz bezeichnet.

Die verschiedenen Ansätze zur RANS-Modellierung lassen sich grundsätzlich in die direkte Modellierung und die Modellierung des Reynoldsspannungstensors mittels Differentialgleichungen einteilen. Die direkten Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass die Reynoldsspannungen direkt durch algebraische Ausdrücke modelliert werden. Hierzu gehören unter anderen auch die Wirbelviskositätsmodelle. Bei den Reynoldsspannungsmodellen (RSM) werden die Reynoldsspannungen durch Transportgleichungen beschrieben, in denen wiederum neue Unbekannte in Form höherer statistischer Momente auftreten. In diesem Fall werden diese höheren statistischen Momente modelliert. Bei algebraischen Spannungsmodellen (ASM) werden diese Differentialgleichungen vereinfacht, um algebraische Ausdrücke zur Schließung des Gleichungssystems zu erhalten.

Der von Boussinesq (1877) formulierte Wirbelviskositätsansatz modelliert die turbulenten Spannungen in den Impulsgleichungen durch eine turbulente Viskosität, die so genannte Wirbel- oder Scheinviskosität. Diese variiert räumlich und zeitlich als Funktion der Strömung, deshalb ist es erforderlich sie mittels eines Turbulenzmodells zu berechnen. Wirbelviskositätsmodelle können entsprechend der Anzahl der zusätzlichen Transportgleichungen in Nullgleichungs-, Eingleichungs-, Zweigleichungs- bzw. Mehrgleichungsmodelle unterteilt werden. Das am häufigsten verwendete  $k$ - $\varepsilon$ -Modell ist ein Zweigleichungsmodell mit Gleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie  $\varepsilon$ . Das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell wurde 1972 von Launder & Spalding (1972) entwickelt. Der große Erfolg

des Modells ist wohl dem relativ geringen Rechenaufwand und der hohen numerischen Stabilität zuzuschreiben. Schwächen hat das Modell allerdings bei komplexen Strömungen. Anisotropien in der Turbulenz sowie spezielle Effekte, wie z.B. Rotationen in der Strömung können damit nicht korrekt modelliert werden (Oberlack 2000).

Ein weiteres, häufig verwendetes Zweigleichungsmodell ist das  $k$ - $\omega$ -Modell. Dieses Modell ist hauptsächlich bekannt aus den Arbeiten von Wilcox (1993), Grundlage sind aber die Arbeiten von Kolmogorov (1942). Im Vergleich zu dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell wird die  $\varepsilon$ -Gleichung durch eine  $\omega$ -Gleichung ersetzt. Dies führt zu besseren Vorhersagen in Grenzschichten sowie in Wiederanlegezonen hinter Grenzschichtablösungen. In der Nähe von Wänden wird bei Wirbelviskositätsmodellen die Verwendung einer Wandfunktion notwendig, da die Voraussetzung der lokalen Isotropie der Turbulenz und die Vernachlässigung der molekularen Viskosität hier nicht mehr erfüllt wird. Als Grundlage für die Wandfunktion dient das logarithmische Wandgesetz (Pope 2000), das sich durch Ähnlichkeitsbetrachtungen oder aus dem Prandtlschen Mischungsweggesetz für eine längsangeströmte, ebene Platte herleiten lässt.

Die oben beschriebenen RSM verwenden die vollen Transportgleichungen der Reynoldsspannungen. Die RSM-Differentialgleichungen beinhalten weitere vier, ungeschlossene Terme, welche modelliert werden müssen. Mit diesen Modellen können genauere Ergebnisse erzielt werden, aber der Rechenaufwand ist deutlich größer, und die Konvergenz der Berechnung kann nicht immer gewährleistet werden.

Bei algebraischen Reynoldsspannungsmodellen werden diese Transportgleichungen durch die Vernachlässigung der Advektions- und Diffusionsterme so vereinfacht, dass nicht mehr Differentialgleichungen gelöst werden müssen, sondern algebraische Ausdrücke zur Berechnung der Reynoldsspannungen zur Verfügung stehen. Hier sind die expliziten algebraischen Reynoldsspannungsmodelle (EARSM) hervorzuheben. Eine gute Beschreibung dieser Modelle liefert Johansson (2002). Verglichen mit den RSM zeichnen sich die EARSM durch ihre numerische Stabilität aus. Im Gegensatz zu den Wirbelviskositätsmodellen vermeiden sie die Defizite in der Berechnung von Strömungen mit starken Krümmungen der Stromlinien, die für viele technische Applikationen von Bedeutung sind.

Hervorzuheben ist, dass allen Modellen eine allgemeine Gültigkeit fehlt, d.h. es gibt kein RANS-Modell, das für alle Strömungsfälle (bei gleichen Modellparametern) zufriedenstellende Ergebnisse liefern kann (Ferziger 1996).

### 2.3.3 Large-Eddy Simulation - LES

Die Idee der LES ist es die Vorteile der DNS und der statistischen Turbulenzmodellierung zu vereinen: Die Genauigkeit der DNS mit dem geringen Rechenbedarf des RANS-Konzepts. Dies ist nur mit Abstrichen möglich. So liegt die LES in Genauigkeit und numerischem Aufwand zwischen den beiden Methoden (siehe Abbildung 2.2).

Bei der LES werden nur die großen, energietragenden turbulenten Skalen in der numerischen Simulation aufgelöst. Die kleinen Skalen und ihr Einfluss auf die großen

Skalen müssen modelliert werden. Tabelle 2.1 zeigt die Eigenschaften von großen und kleinen turbulenten Strukturen. Die kleinen Wirbel entstehen aus dem Zerfall der großen Wirbel und verlieren so Informationen über Randbedingungen oder Geometrien. Sie sind somit nahezu homogen und isotrop. Durch diese universellen, von den Randbedingungen bzw. von der Geometrie unabhängigen Eigenschaften der kleinen Wirbel erscheint das Finden eines allgemeingültigen Modells für die LES wahrscheinlicher als im RANS-Kontext. Der Rechenaufwand einer LES ist immer noch sehr hoch, aber deutlich geringer als der einer DNS. So werden heutzutage schon technische Strömungen mit moderaten Reynoldszahlen gerechnet.

<b>Große Skalen</b>	<b>Kleine Skalen</b>
abhängig von der Geometrie	universal
geordnet	zufällig verteilt
erfordern gezielte Beschreibung	können statistisch modelliert werden
inhomogen	homogen
anisotrop	isotrop
langlebig	kurzlebig
diffusiv	dissipativ
schwierig zu modellieren	leicht zu modellieren

Tabelle 2.1: Unterschiede zwischen großen und kleinen Skalen unter idealisierten Bedingungen (nach (Schumann & Friedrich 1987))

In Kapitel 3 wird genauer auf die Filterung und die daraus resultierenden Gleichungen eingegangen. Weiterhin werden die wichtigsten Feinstrukturmodelle beschrieben. Bevor auf die in dieser Arbeit verwendeten Modelle eingegangen wird, wird ein Überblick über die dynamischen Prozeduren zur Bestimmung von Modellkonstanten gegeben.

## 2.4 Modellierungsprinzipien

Unter Modellierungsprinzipien können Richtlinien zur systematischen Entwicklung von Turbulenzmodellen verstanden werden. Offensichtliche Grundsätze sind dimensionale und tensorielle Konsistenz sowie physikalische Kohärenz. Dimensionale Konsistenz ist gegeben, wenn alle Terme in allen Gleichungen die gleiche Dimension haben. Der richtige Gebrauch der Tensoralgebra ist notwendig, um sicherzustellen, dass alle Terme die gleichen freien Indizes haben und die Matrizenmultiplikation korrekt durchgeführt wird. Physikalische Kohärenz beschreibt den logischen Zusammenhang zwischen Physik und Modell. Ein Schließungsmodell, das einen realen Prozess abbildet, sollte diesen auch physikalisch plausibel ersetzen, z.B. sollte ein reibungsfreier Effekt nicht durch viskose Parameter modelliert werden.

Weitere Prinzipien sind

- Thermodynamische Konsistenz,

- Rapid Distortion Theory (RDT),
- Realizability,
- Symmetriemethoden.

Diese Prinzipien führen zu neuen mathematischen Entwicklungen, die Richtlinien zur Bewertung, Verbesserung und auch Herleitung von Turbulenzmodellen geben. Einschränkungen, die aus diesen Prinzipien hergeleitet werden, müssen von Turbulenzmodellen eingehalten werden. Diese Prinzipien sind in der Vergangenheit hauptsächlich im RANS-Kontext beachtet worden. Sie müssen aber auch im Kontext der LES eingehalten werden.

Thermodynamische Konsistenz bezeichnet die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Hieraus können Bedingungen bzw. Beschränkungen für Turbulenzmodelle und deren Modellkoeffizienten abgeleitet werden. Für nähere Ausführungen zur thermodynamischen Konsistenz wird auf Sadiki (1998) verwiesen. In der RDT werden gegebene Geschwindigkeitsfelder mit einer Störung von kurzer Dauer überlagert. Es werden linearisierte Gleichungen verwendet, um die Veränderungen der Geschwindigkeitsfelder zu beschreiben. Aus den sich ergebenden Erkenntnissen können ebenfalls Richtlinien zur Modellierung abgeleitet werden. Einen detaillierten Einblick gibt Pearson (1959). Im Folgenden wird auf die Realizability und die Symmetriemethoden näher eingegangen.

### 2.4.1 Realizability

Unter dem Begriff Realizability bzw. Realisierbarkeit werden Plausibilitätsforderungen an die Struktur der Reynoldsspannungen zusammengefasst. Die Einhaltung dieser Forderungen soll zu einer besseren Wiedergabe der physikalischen Effekte führen. Sie wurden zuerst von Schumann (1977) auf die Modellierung turbulenter Strömungen angewendet. Aus dem statistischen Charakter der Turbulenz folgen drei relevante Forderungen:

$$u_i'' u_i'' \geq 0, \quad (2.16)$$

$$(u_i'' u_j'')^2 \leq (u_i'' u_i'') (u_j'' u_j''), \quad (2.17)$$

$$\det(u_i'' u_j'') \geq 0. \quad (2.18)$$

Hier wird die Einsteinsche Summenkonvention nicht angewendet. Ungleichung (2.17) ist auch als Schwarzsche Ungleichung bekannt.

Im RANS-Kontext wurden diese Bedingungen als theoretische Basis zur Herleitung einiger Turbulenzmodelle verwendet (Johansson & Hallbäck 1994, Ristorcelli, Lumley & Abid 1995, Sjögren & Johansson 2000). Die Realizability-Bedingungen lassen sich auch auf den Feinstrukturspannungstensor  $\tau_{ij}$  in der LES übertragen. Vreman, Geurts & Kuerten (1994) zeigen, dass der Filterkernel  $G$  positiv sein muss ( $G \geq 0$ ), damit  $\tau_{ij}$  "realisierbar" ist, d.h. dass die Ungleichungen (2.16)-(2.18) für die Feinstrukturspannungen eingehalten werden. Aus weiteren Gründen ist ein "realisierbarer" Feinstruk-

turspannungstensor wünschenswert. Dadurch wird die Bedingung eingehalten, dass die verallgemeinerte turbulente kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2} \tau_{ii} \quad (2.19)$$

eine positive Größe ist. Das ist eine wichtige Bedingung für Feinstrukturmodelle, die eine Gleichung für die turbulente kinetische Energie beinhalten (Ghosal, Lund, Moin & Akselvoll 1995, Yoshizawa 1982, Yoshizawa 1986).

Neben den Bedingungen für den Filterkernel ergeben sich auch Bedingungen für die Modellierung des Feinstrukturspannungstensors. So ergibt sich für ein Wirbelviskositätsmodell der Form

$$\tau_{ij} = -\nu_\tau \alpha_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.20)$$

eine untere Grenze für  $k$  in Abhängigkeit von der Wirbelviskosität, damit  $\tau_{ij}$  "realisierbar" bleibt (Geurts 2003). Weitere Konsequenzen für die Modellierung können (Vreman et al. 1994) entnommen werden.

## 2.4.2 Symmetriemethoden

Die Navier-Stokes-Gleichungen besitzen fundamentale Eigenschaften wie die Invarianz unter bestimmten Transformationen. Diese Eigenschaften werden Symmetrien genannt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Kontinuitätsgleichung (2.8) und die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) zusammengefasst durch

$$\mathcal{E}(y) = 0 \quad (2.21)$$

dargestellt, wobei  $y = (t, x_i, u_i, p)$ . Eine Transformation  $T_a$  von der Form

$$T_a : y \mapsto \hat{y} = \hat{y}(y, a) \quad (2.22)$$

sei eine Transformation bezüglich des kontinuierlichen Parameters  $a$ . Diese Transformation wird als Symmetrie bezeichnet, wenn gilt:

$$\mathcal{E}(y) = 0 \implies \mathcal{E}(\hat{y}) = 0. \quad (2.23)$$

Mit Hilfe der Lie-Gruppen-Theorie können die Symmetrien einer partiellen Differentialgleichung bestimmt werden. Die Navier-Stokes-Gleichungen weisen Invarianz gegenüber einer Translation in Zeit sowie einer Translation des Druckes auf. Sie sind außerdem Skalen-, Rotations- und Galilei-Invariant. Weiterhin besitzen die Navier-Stokes-Gleichungen eine Symmetrie, die in der Literatur häufig als "2d material frame indifference" (2DMFI) bezeichnet wird (Oberlack 2000). Die 2DMFI sagt aus, dass die Rotation einer zweidimensionalen Strömung diese nicht verändert, wenn die Rotationsrate konstant ist und die Drehung um die unabhängige Achse erfolgt.



Neben den Lie-Symmetrien besitzen die Navier-Stokes-Gleichungen auch diskrete Symmetrien. Hier sind die Reflektionssymmetrien bezüglich Raum und Zeit zu nennen. Für nähere Ausführungen wird auf Oberlack (2000) verwiesen.

Diese Symmetrien sind physikalische Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen. Und es ist wesentlich, dass Turbulenzmodelle die vorhandenen Symmetrien nicht brechen. Dies gilt sowohl für RANS-Modelle als auch für Feinstrukturmodelle im LES-Kontext. Wie Oberlack (1997) zeigt, werden von den meisten Feinstrukturmodellen nicht alle Symmetrien eingehalten. Hierauf wird genauer in der Beschreibung der Feinstrukturmodelle in Kapitel 3.4 eingegangen.



## 3 Elemente der Large-Eddy Simulation

### 3.1 Filterung

Um die dissipativen Skalen von den energietragenden Skalen zu trennen, werden die physikalischen Feldgrößen  $\psi$  in einen Grobstrukturanteil  $\bar{\psi}$  und einen Feinstrukturanteil  $\psi'$  aufgespalten:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi'. \quad (3.1)$$

Mathematisch lässt sich der Grobstrukturanteil durch eine räumliche Filterung der physikalischen Größe mit der Filterfunktion  $G(x_i, x'_i)$  ausdrücken:

$$\bar{\psi}(x_i) = \int_V G(x_i, x'_i) \psi(x'_i) dx'_i. \quad (3.2)$$

Für den Filterkernel  $G$  muss gelten:

$$\int_V G(x_i, x'_i) dx_i = 1. \quad (3.3)$$

Die Filterfunktion  $G(x_i, x'_i)$  stellt eine räumliche Mittelung mit einem begrenzten Wirkungsbereich dar. Sie entspricht einer Tiefpassfilterung und trennt die hochfrequenten Strukturen ab. In der LES häufig verwendete Filterfunktionen sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Die Filterfunktionen sind definiert als:

- Top-Hat-Filter

$$G(x_i, x'_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } |x_i - x'_i| < \frac{1}{2}\Delta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.4)$$

- Gauß-Filter

$$G(x_i, x'_i) = \left( \frac{6}{\pi\Delta^2} \right)^{\frac{2}{3}} \exp\left( \frac{-6|x_i - x'_i|^2}{\Delta^2} \right), \quad (3.5)$$

- Sharp-Spectral-Filter

$$G(x_i, x'_i) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin\left( \frac{\pi(x_i - x'_i)}{\Delta} \right)}{x_i - x'_i} \right]. \quad (3.6)$$

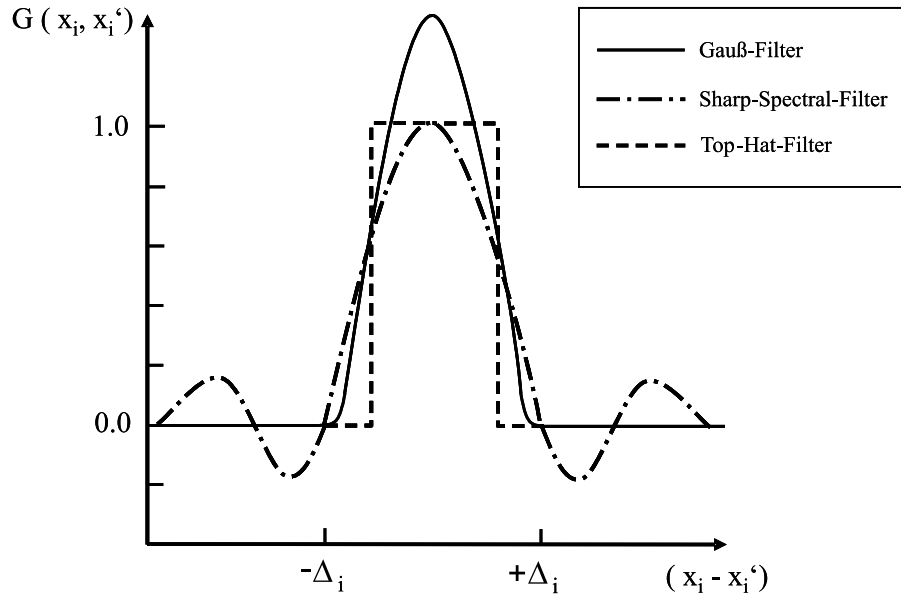


Abbildung 3.1: Filterfunktionen

Hier steht  $\Delta$  für die Filterweite. Es gibt neben Top-Hat-, Gauß- und Sharp-Spectral-Filter noch weitere Filter (z. B. Cauchy-, Pao-Filter), die jedoch selten Verwendung finden.

Der Filterkernel  $G$  des Top-Hat-Filters ist im Intervall  $|x_i - x_i'| < \frac{1}{2}\Delta$  konstant und außerhalb dieses Bereichs gleich Null. Die Anwendung dieses Filters führt zu einer einfachen Integration über die Filterweite  $\Delta$ . Dies entspricht einer Mittelwertbildung über diesen Bereich. Die Wirkungsweise des Top-Hat-Filters im Wellenzahlen-Raum ist gleichzusetzen mit der Wirkungsweise des Sharp-Spectral-Filters im physikalischen Raum. Daraus lässt sich folgern, dass er nicht zu einer scharfen Trennung von kleinen und großen Skalen führt, sondern eine Dämpfung der kleinen Skalen zur Folge hat.

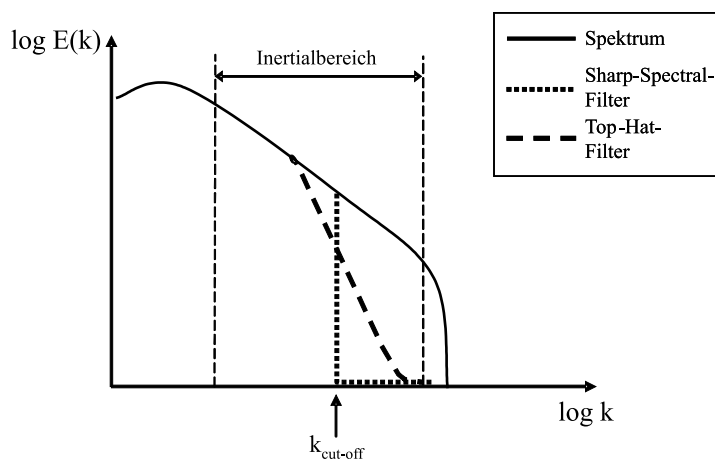


Abbildung 3.2: Gefiltertes Energiespektrum

Abbildung 3.2 zeigt, dass der Sharp-Spectral-Filter ab einer bestimmten "Cut-Off"-Wellenzahl  $k_{\text{cut-off}}$  alle Frequenzen abtrennt, während der Top-Hat-Filter, wie oben beschrieben, die kleinen Skalen dämpft. Wie Vreman et al. (1994) zeigen, verletzen Filterfunktionen, die nicht ausschließlich positiv sind, die Realizability-Bedingungen und können zu negativer kinetischer Energie während der Berechnung führen. Zu diesen Filtern gehört der Sharp-Spectral-Filter. Andererseits ist bekannt, dass das Smagorinsky-Modell in Verbindung mit diesem Filter zu den besten Ergebnissen führt (Piomelli, Moin & Ferziger 1988).

Ein ausgeprägter Inertialbereich im Energiespektrum der Stömung ist notwendig um die dissipativen Skalen klar von den energietragenden Skalen zu trennen. Dies ist in der Regel nur bei hohen Reynoldszahlen gegeben. Die kleinsten aufgelösten Skalen sollten noch im Inertialbereich liegen. Alternativ kann gefordert werden, dass die aufgelösten Grobstrukturen den Großteil der Energie beinhalten.

Für die Finite-Volumen-Methode bietet sich die Anwendung des Top-Hat-Filters an. Aufgrund der räumlichen Diskretisierung, die mit einer Mittelung über das Zellenvolumen gleichzusetzen ist, ist eine Filterung mit diesem Filter in das Verfahren impliziert (Schumann 1975). Zur Berechnung der Feinstrukturmodelle ist meist ein Längenmaß notwendig, für das normalerweise die Filterweite verwendet wird. Für anisotrope Filter bzw. Gitter gibt es mehrere Möglichkeiten diese Filterweite zu berechnen:

$$\Delta_1 = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.7)$$

$$\Delta_2 = \left( \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.8)$$

wobei  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  den Gitterabstand in der jeweiligen Raumrichtung darstellt. Der Unterschied zwischen beiden Berechnungsarten verschwindet für würfelförmige Gitterzellen. Für stark verzerrte Gitter ergeben sich Unterschiede, die allerdings relativ gering sind, wie Lafeber (1987) nachweist. Die Wahl der Berechnung von  $\Delta$  ist relativ willkürlich und es sind weitere Variationen denkbar (Deardorff 1971, Mason & Callen 1986). In dieser Arbeit wird die Filterweite nach Gleichung (3.7) berechnet.

## 3.2 Grundgleichungen der LES

Wird die Filterung auf die Kontinuitätsgleichung (2.8) und die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) angewendet, so ergeben sich die gefilterten Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij}) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.10)$$

mit

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.11)$$

Die Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}$  beschreiben den Effekt der nicht aufgelösten Skalen auf die großen Skalen. Diese Spannungen sind definiert als

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.12)$$

und können nicht berechnet werden. Das Gleichungssystem ist somit ungeschlossen. Um es zu schließen, müssen die Feinstrukturspannungen modelliert werden. Den Gleichungen (3.9) und (3.10) liegt die Annahme zugrunde, dass Filterung und räumliche Ableitung kommutieren. Diese Annahme ist jedoch nur für homogene Filter gültig. Bei der Verwendung von anisotropen Gittern, wie sie bei wandgebundenen Strömungen oder Strömungen in komplexen Geometrien notwendig sind, entsteht ein Kommutationsfehler. Auf diesen Fehler wird in Kapitel 3.3 näher eingegangen.

Die Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}$  können in die Leonard-Spannungen  $L_{ij}$ , die Kreuzspannungen  $C_{ij}$  und die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen  $R_{ij}$  zerlegt werden:

$$\tau_{ij} = \underbrace{\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{u_i u'_j} + \overline{u'_i u_j}}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{R_{ij}} \quad (3.13)$$

Die Leonard-Spannungen repräsentieren die Dissipation der großskaligen Strukturen. Sie hängen nur von Größen der Grobstruktur ab und können direkt berechnet werden. Die Kreuzspannungen bilden den Energieaustausch zwischen großen und kleinen Strukturen ab. In diesen Termen sind unbekannte Größen der Feinstruktur enthalten, die modelliert werden müssen. Rogallo & Moin (1984) haben eine Taylorreihenentwicklung zur Bestimmung der Kreuzspannungen hergeleitet. Die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen bestehen nur aus Feinstrukturgrößen und beschreiben die Interaktion zwischen den nicht aufgelösten Skalen. Sie müssen somit modelliert werden.

Durch diese Zerlegung lassen sich die einzelnen Effekte der Feinstrukturspannungen getrennt betrachten und auch getrennt modellieren. Dieser Ansatz konnte sich aber nicht durchsetzen, da die Leonard- und auch die Kreuzspannungen nicht Galilei-Invariant sind (Speziale 1985). Die Feinstrukturspannungen werden in der Regel komplett modelliert.

### 3.3 Commutation Error

Bei der Herleitung der Gleichungen (3.9) und (3.10) wird eine Kommutativität von Filterung und räumlicher Ableitung angenommen:

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i}. \quad (3.14)$$

Diese Annahme ist nur für homogene Filter mit konstanter Filterweite gültig. Wird die Ungültigkeit dieser Annahme für inhomogene Filter berücksichtigt, ergeben sich die Grundgleichungen der LES zu:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = - \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right], \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij}) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ & - \left[ \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij}) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei der Kommutationsfehler mit eckigen Klammern gekennzeichnet ist:

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] = \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i}. \quad (3.17)$$

Filter mit veränderlicher Filterweite sind z. B. bei wandgebundenen Strömungen notwendig. Die energietragenden Strukturen werden zur Wand hin kleiner. Würde hier eine konstante Filterweite gewählt, die sich an den Strukturen im wandfernen Gebiet orientiert, so würden im wandnahen Gebiet wesentliche Strukturen durch die zu große Filterweite herausgefiltert. Andererseits würden mit einer zu kleinen konstanten Filterweite im wandfernen Gebiet die kleinen Skalen nicht ausreichend herausgefiltert (Moin & Jimenéz 1993).

Das Problem der Kommutativität von Filterung und räumlicher Ableitung wurde zuerst betrachtet von Ghosal & Moin (1995). Sie zeigen, dass der Kommutationsfehler zweiter Ordnung ist. Es wird eine Filterdefinition hergeleitet, basierend auf einer Transformationsvorschrift, die aus dem Zusammenhang zwischen dem anisotropen Gitter und eines kartesischen, äquidistanten Einheitsgitters hervorgeht. Die Fehlerterme werden mit einer Taylorreihenentwicklung über die Filterweite erweitert, wobei die Koeffizienten von der räumlichen Ableitung des gefilterten Feldes und der Transformationsvorschrift abhängen. Hierdurch entstehen weitere Terme in den gefilterten Gleichungen, die die differentielle Ordnung erhöhen. Folglich werden zusätzliche Randbedingungen erforderlich. van der Ven (1995) entwickelt eine Gruppe von einparametrischen kommutativen Filtern für Diskretisierungen beliebiger Ordnung. Eine allgemeine Formulierung des Kommutationsfehlers durch anisotrope Filter und durch Gebietsgrenzen bzw. Randbedingungen wird von Fureby & Tabor (1997) vorgeschlagen. Eine numerische Analyse der Verteilung der Intensität der nichtkommutativen

Terme wird hier durchgeführt durch Vergleiche von LES- und DNS-Daten einer turbulenten Kanalströmung bei  $Re_\tau = 180$  und 395. Wie erwartet sind die Intensitäten dort am höchsten, wo die Anisotropie des Gitters am stärksten ist. Allerdings hat die Verwendung von unterschiedlichen Feinstrukturmodellen nur geringen Einfluss auf die Intensitäten der nichtkommutativen Terme.

Eine Verallgemeinerung der Arbeiten von Ghosal und Moin und van der Ven wird von Vasilyev, Lund & Moin (1998) aufgezeigt. Eine Minimierung des Kommutationsfehlers wird durch die Verwendung einer Klasse von Filtern mit  $n - 1$  verschwindenden Momenten erreicht, wenn eine numerische Diskretisierung  $n$ -ter Ordnung verwendet wird. Es werden Regeln zur Konstruktion von diskreten Filtern erstellt, welche mit Ableitungen jeder Ordnung in komplexen Geometrien kommutieren. Durch eine Betrachtung des lokalen Spektrums des Kommutationsfehlers zeigen Vasilyev & Goldstein (2004), dass die Größenordnung des Fehlers linear proportional zum Faktor der Filterweitenänderung ist.

Breuer (2001) weist darauf hin, dass falls die gefilterten Erhaltungsgleichungen mit einem numerischen Verfahren zweiter Ordnung gelöst werden und eine Filterweite vergleichbar mit der Maschenweite des Gitters gewählt wird, der Kommutationsfehler vernachlässigt werden kann, da er dann die Größenordnung des Abbruchfehlers besitzt. Wird allerdings ein Verfahren höherer Ordnung benutzt, ist ein Kommutationsfehler zweiter Ordnung nicht akzeptabel.

In dieser Arbeit wird ein numerisches Verfahren zweiter Genauigkeitsordnung verwendet, weshalb der Einfluss des Kommutationsfehlers vernachlässigt wird. Bei der Gittererstellung für die numerischen Simulationen wird darauf geachtet, die Anisotropie der Gitter möglichst gering zu halten, um den Kommutationsfehler zu minimieren.

### 3.4 Feinstrukturmodelle

Die LES scheint sehr vielversprechend für die Simulation von turbulenten Strömungen. Aus diesem Grund wurde in den letzten Jahrzehnten viel Forschung auf dem Gebiet der Feinstrukturmodellierung betrieben. Dementsprechend hoch ist die Anzahl der verschiedenen Ansätze zur Modellentwicklung und der entsprechenden Modellvarianten. Wie oben bereits beschrieben, ist die Aufgabe der Modelle den Einfluß der kleinen, herausgefilterten Skalen auf die Strömung zu modellieren. Wie im RANS-Konzept führt der LES-Ansatz auf ein Schließungsproblem. Um das Gleichungssystem schließen zu können, müssen semi-empirische Annahmen eingeführt werden. Im folgenden werden hier nur die wichtigsten Ansätze beschrieben. Einen detaillierten Überblick und auch genaue Beschreibungen über eine große Auswahl von Ansätzen und Modellen bietet Sagaut (2001).

Die Feinstrukturspannungen werden zu Modellierungszwecken in die Spur des Tensors und den spurfreien Teil aufgeteilt. Die Spur der Spannungen wird dann mit dem



Druck kombiniert und die spurfreien Feinstrukturspannungen werden modelliert. Im folgenden stellt  $\tau_{ij}^*$  den spurfreien Feinstrukturspannungstensor dar:

$$\tau_{ij}^* = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \quad (3.18)$$

Für Wirbelviskositätsmodelle ist diese Aufspaltung für inkompressible Strömungen notwendig. Wird die Kontinuitätsgleichung eingehalten, ist der Deformationstensor  $S_{ij}$  spurfrei. Durch den linearen Zusammenhang zwischen Deformationstensor und Feinstrukturspannungen müssen diese ebenfalls spurfrei sein.

### 3.4.1 Smagorinsky-Modell

Das bekannteste Feinstrukturmodell wurde bereits 1963 von Smagorinsky (1963) formuliert. Es gehört noch heute zu den am häufigsten angewendeten Modellen. Es basiert auf dem Wirbelviskositätsansatz, welcher die Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}^*$  zu dem großskaligen Scherspannungstensor  $\bar{S}_{ij}$  in Beziehung setzt. Als Proportionalitätsfaktor wird die turbulente Viskosität  $\nu_\tau$  verwendet:

$$\tau_{ij}^* = -2\nu_\tau \bar{S}_{ij}. \quad (3.19)$$

Die turbulente Viskosität  $\nu_\tau$  lässt sich aus dem Prandtlschen Mischungsweg herleiten, wobei sie zum Betrag der lokalen großskaligen Geschwindigkeitsgradienten in Bezug gesetzt wird:

$$\nu_t = l^2 |\bar{S}_{ij}| = l^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}. \quad (3.20)$$

Das Längenmaß  $l$  steht charakteristisch für die kleinen Skalen und wird aus der Smagorinsky-Konstante  $C_s$  und der Filterweite  $\Delta$  gebildet:

$$l = C_s \Delta. \quad (3.21)$$

Wie alle Wirbelviskositätsmodelle lässt sich das Smagorinsky-Modell sehr leicht über die Viskosität implementieren. Zu der Viskosität des Fluids  $\nu$  in den Navier-Stokes-Gleichungen wird die turbulente Viskosität  $\nu_\tau$  einfach hinzuaddiert. Es entsteht die effektive Viskosität  $\nu_{\text{eff}}$ :

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_\tau. \quad (3.22)$$

Simulationen haben gezeigt, dass die Konstante  $C_s$  nicht universell ist. Sie ist unterschiedlich für verschiedene Strömungsfälle, und ein optimaler Wert kann auch räumliche Variationen aufweisen. Je nach Art der Strömung liegt sie zwischen 0,065 und 0,2. Hinzu kommt ein fast vollständiges Versagen des Smagorinsky-Modells in Wandnähe. In diesem Bereich muss die Konstante gedämpft werden, da mit Annäherung an die Wand die Geschwindigkeitsschwankungen gegen Null konvergieren. Aus diesem Grund sollte dieses Modell bei wandgebundenen Strömungen immer mit der Van-Driest-Dämpfungsfunktion angewendet werden (Moin & Kim 1982). Wei-

terhin gibt es dynamische Prozeduren um die Konstante während der Rechnung zu bestimmen. Hierauf wird näher in Kapitel 3.5 eingegangen.

Schwachpunkte des Modells sind,

- dass nicht gewährleistet ist, dass die Wirbelviskosität für laminare Strömungen automatisch gleich Null ist,
- dass der Backscatter-Effekt nicht wiedergegeben werden kann (Leslie & Quarini 1979),
- zu hohe dissipative Wirkung.

Zur Beschreibung des Backscatter-Effekts gibt es verschiedene Erweiterungen des Standard-Modells (Schumann 1995, Leith 1990, Mason & Thomson 1992).

Diverse *a priori*-Untersuchungen haben gezeigt, dass das Smagorinsky-Modell nur eine geringe Übereinstimmung mit den tatsächlichen Feinstrukturspannungen erreicht. Für verschiedene Strömungsfälle liegen die Korrelationskoeffizienten zwischen modellierten und tatsächlichen Feinstrukturspannungen bei 0,1-0,2 (Clark, Ferziger & Reynolds 1979, McMillan & Ferziger 1979, Piomelli et al. 1988). Das Modell bildet jedoch den grundlegenden Mechanismus der nicht aufgelösten Skalen ab. Es entzieht der Strömung Energie. Außerdem scheinen die Details der Feinstruktur in den untersuchten Strömungen kaum Einfluss auf die Statistiken der Grobstruktur zu haben (Rogallo & Moin 1984).

Wie Oberlack (1997) zeigt, bricht das Smagorinsky-Modell die Skaleninvarianz, da als Längenmaß die Filterweite  $\Delta$  verwendet wird. Dieses Längenmaß steht nicht in Zusammenhang mit einem turbulenten Längenmaß.

### 3.4.2 Scale Similarity Modelle

Die Scale-Similarity Modelle bzw. Ähnlichkeitsmodelle gehen auf die Arbeiten von Bardina, Ferziger & Reynolds (1980) zurück. Sie basieren auf der Annahme, dass die kleinsten aufgelösten Skalen den größten nicht aufgelösten ähnlich sind. Weiterhin wird folgende Annahme getroffen:

$$\overline{\psi\phi} = \overline{\psi}\overline{\phi}. \quad (3.23)$$

Durch eine weitere Anwendung der Filterung werden die Kreuzspannungen und der Feinstruktur-Reynolds-Spannungsterm modelliert mit:

$$R_{ij} = C_B (\overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}}) (\overline{u_j} - \overline{\overline{u_j}}), \quad (3.24)$$

$$C_{ij} = C_B (\overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}}) \overline{\overline{u_j}} (\overline{u_j} - \overline{\overline{u_j}}) \overline{\overline{u_i}}, \quad (3.25)$$

oder

$$R_{ij} + C_{ij} = C_B (\overline{u_i u_j} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}). \quad (3.26)$$

Das Hinzufügen der Leonard-Spannungen, welche direkt aus Größen der Grobstruktur berechenbar sind, führt zu:

$$\tau_{ij}^* = L_{ij} + R_{ij} + C_{ij} = C_B (\overline{\overline{u_i u_i}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}), \quad (3.27)$$

wobei die Bardina-Konstante  $C_B$  gleich Eins sein muss, um Galilei-Invarianz zu gewährleisten (Speziale 1985). Das Modell gibt alle Symmetrien der Navier-Stokes-Gleichungen wieder. Die 2DMFI wird eingehalten, wenn die eingesetzte Filterfunktion bestimmte Bedingungen einhält (Razafindralandy 2005).

Bei der Verwendung des Sharp-Spectral-Filters muss für die zweite Filterung eine größere Filterweite gewählt werden, da bei gleicher Filterweite  $\overline{u_i} = \overline{\overline{u_i}}$  gilt und somit die modellierten Feinstrukturspannungen gleich Null sind. *A priori*-Tests zeigen eine wesentlich verbesserte Übereinstimmung der tatsächlichen mit den modellierten Feinstrukturspannungen als es beim Smagorinsky-Modell der Fall ist. Das Modell kann den rückwärtigen Energietransfer wiedergeben, aber eine dissipative Wirkung ist kaum vorhanden. Eine Kombination dieses Modells mit dem Smagorinsky-Modell, ein sogenanntes "*Mixed Modell*", erhöht die Dissipation (Zang, Street & Koseff 1993):

$$\tau_{ij}^* = C_B (\overline{\overline{u_i u_i}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}) - 2C_S^2 \Delta^2 |\overline{S_{ij}}| \overline{S_{ij}}. \quad (3.28)$$

Durch eine alternative Aufspaltung des Feinstrukturspannungstensors erhalten Fureby, Bensow & Persson (2005) einen modifizierten Leonard-Term von der Form des Bardina-Modells. Sie weisen darauf hin, dass dieser explizite Term exakt ist und durch dessen Einbeziehung in die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen der Modellierungsgrad reduziert wird. Aufgrund der alternativen Aufspaltung ergeben sich modifizierte Kreuzspannungen, die Galilei-Invariant sind. Sie können nun zusammen mit den Feinstruktur-Reynolds-Spannungen modelliert werden.

### 3.4.3 Approximate Deconvolution Modell

Das Approximate Deconvolution Modell (ADM) wurde von Stolz *et al.* (2001a, 2001b) ohne notwendige physikalische Modellannahmen entwickelt. Dieses Modell basiert auf der Grundlage einer Taylorreihenentwicklung des inversen Filterkernels  $G^{-1}$ . Das ADM besteht aus drei Prozessen:

- Durchführung einer expliziten Filterung,
- Näherung der ungefilterten Variablen durch inverse Filterung der gefilterten Variablen,
- Hinzufügen eines Relaxations-Terms, der die dissipative Wirkung der durch das Gitter nicht repräsentierten Skalen simuliert.

Für die explizite Filterung werden Padé-Approximationen basierend auf der Arbeit von Lele (1993) als Filterfunktionen verwendet. Die approximative Invertierung des

gefilterten Geschwindigkeitsfeldes  $\bar{u}_i(x)$  liefert das rekonstruierte Geschwindigkeitsfeld  $u_i^*(x) \approx u_i(x)$ :

$$u_i^* = Q_N * \bar{u}_i, \quad (3.29)$$

wobei  $Q_N$  der approximierte invertierte Filter ist. Dieser lässt sich durch eine Reihenentwicklung wie folgt darstellen:

$$Q_N = \sum_{v=0}^N (I - G)^v \approx G^{-1}. \quad (3.30)$$

Hier ist  $I$  der Identitätsoperator. Mit  $N = 5$  und numerischen Verfahren hoher Genauigkeitsordnung wurden für viele Testfälle gute Ergebnisse erzielt (Stolz, Adams & Kleiser 2001a). Mit dem rekonstruierten Geschwindigkeitsfeld  $u_i^*(x)$  lässt sich der Feinstrukturspannungstensor wie folgt berechnen:

$$\tau_{ij}^* = \overline{u_i^* u_j^*} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.31)$$

Das Geschwindigkeitsfeld kann aber auch direkt in den nichtlinearen Term der Impulsgleichung eingesetzt werden. Zur Rekonstruktion werden nur der Teil des Spektrums zwischen der Cut-Off-Wellenzahl der expliziten Filterung und der impliziten Filterung durch das Gitter ausgewertet. Der Einfluss der nicht aufgelösten Skalen wird durch einen Relaxationsterm erreicht. Hiermit wird durch eine zweite Filterung den Skalen zwischen expliziter und impliziter Filterung kinetische Energie entzogen.

Sowohl *a-priori*- als auch *a-posteriori*-Tests an einfachen Strömungskonfigurationen haben gezeigt, dass das ADM gegenüber Wirbelviskositätsmodellen in der Regel bessere Ergebnisse liefert (Adams 2000, Stolz et al. 2001a, Stolz, Adams & Kleiser 2001b). Der Ansatz setzt jedoch Verfahren hoher Ordnungsgenauigkeit voraus, was eine Übertragung auf krummlinige Gitter problematisch macht. Das ADM besitzt zwei freie Parameter, einen Relaxationsparameter im Relaxations-Term und die Anzahl der Glieder in der Reihenentwicklung für die Approximation des inversen Filters. Die Parameter sind für einfache Strömungen näherungsweise bekannt, für komplexere Fälle liegen jedoch keine Erfahrungen vor. Außerdem führt die explizite Filterung zu einem erhöhten numerischen Aufwand.

### 3.4.4 Strukturfunktions-Modelle

Von Chollet & Lesieur (1981) wurde ein Wirbelviskositätsmodell im spektralen Raum aufgestellt. Die Wirbelviskosität wird mittels des Energiespektrums im Bereich der Cut-Off-Wellenzahl bestimmt. Die Herleitung beruht auf der "*Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian (EDQNM)*"-Theorie. Im Wellenzahl-Raum führt dieses Modell zu hervorragenden Ergebnissen (Lesieur & Métais 1996), jedoch muss der Ansatz zur Berechnung von komplexen Geometrien in den physikalischen Raum übertragen werden. Für das Strukturfunktions-Modell nach Métais & Lesieur (1992) wird hierzu die Wirbelviskosität über eine Strukturfunktion zweiter Ordnung basierend auf dem Grobstrukturfeld bestimmt. Die Bestimmung der Strukturfunktion entspricht einer

Berechnung eines lokalen Mittelwerts von quadrierten Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen dem aktuellen Punkt und seinen Nachbarn (Comte, Lee & Cabot 1990). Dieses Modell ist ebenfalls nicht in der Lage den Backscatter-Effekt wiederzugeben. Bei der Simulation des transitionellen Vorgangs einer Grenzschicht stellt sich heraus, dass dieses Modell zu dissipativ ist. Zur Verbesserung wurden mehrere Varianten des Modells vorgeschlagen (Ducros, Comte & Lesieur 1996, Lesieur & Metais 1996).

### 3.4.5 Mehrgleichungsmodelle

Prinzipiell lassen sich alle bekannten Turbulenzmodelle aus dem RANS-Konzept auf die LES übertragen. Dies gilt natürlich auch für Mehrgleichungsmodelle. Während im RANS-Bereich die Verwendung von Mehrgleichungsmodellen Standard ist, kommen in der LES neben wenigen Eingleichungsmodellen hauptsächlich algebraische Modelle zur Anwendung. Zum einen zeigt dies, dass in der LES derart komplexe Modelle nicht notwendig sind. Zum anderen kann bei Verwendung von weniger rechenintensiven Modellen durch eine Verfeinerung der Gitterauflösung eine erhöhte Genauigkeit erzielt werden.

Bei Eingleichungsmodellen wird die Lösung einer weiteren Transportgleichung notwendig. Bei dem Eingleichungsmodell von Yoshizawa (1982, 1986) wird die Wirbelviskosität anstatt durch den Deformationstensor  $S_{ij}$  durch die Feinstrukturenergie  $k^{sgs}$  ausgedrückt. Das Zeitmaß ist dann die Wurzel der Feinstrukturenergie:

$$\nu_t = C\Delta\sqrt{k^{sgs}}. \quad (3.32)$$

Die Feinstrukturenergie  $k^{sgs}$  wird dann durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial k^{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i k^{sgs}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij} \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \overline{P' u'_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 k^{sgs}}{\partial x_i \partial x_j} - \nu \left( \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} \right) \quad (3.33)$$

bestimmt. Die Terme, die Feinstrukturgrößen beinhalten, sind unbekannt und müssen modelliert werden. Der Rechenaufwand im Vergleich zu algebraischen Modellen ist aufgrund der Lösung von Gleichung (3.33) erhöht. Der Vorteil dieses Modells ist, dass es in laminaren Bereichen keinen Beitrag liefert.

Auch wurden für die LES Schließungen zweiter Ordnung formuliert (Deardorff 1973, Fureby, Tabor, Weller & Gosman 1997). Aufgrund der Rechenregeln für Filterungen ( $\bar{\bar{u}}_i \neq \bar{u}_i, \bar{\bar{u}}'_i \neq 0$ ) beinhalten die sechs Differentialgleichungen für die Komponenten des Feinstruktur-Spannungstensors noch mehr Terme als im RANS-Kontext. Die Erhöhung des Gleichungssystems von vier auf zehn Gleichungen hat außerdem einen immensen Rechenbedarf zur Folge.

### 3.5 Dynamische Feinstrukturmodellierung

Eine spezielle Technik erlaubt es vorhandene Modellkonstanten während der Berechnung anhand von charakteristischen Größen der Strömung zu bestimmen. Dies wird als dynamische Methode bezeichnet. Diese Methoden wurden auch für Feinstrukturmodelle entwickelt. Die bekannteste Methode, beschrieben in Kapitel 3.5.1 hat den Nachteil, dass sie in komplexen Geometrien nicht ohne weiteres anwendbar ist. Weitere Lösungsansätze, die diese Nachteile nicht haben, sind bereits vorhanden. Diese haben jedoch meist erheblichen Rechenbedarf zur Folge. Im folgenden werden diese Methoden beschrieben.

#### 3.5.1 Ansatz nach Germano und Lilly

Germano, Piomelli, Moin & Cabot (1991) entwickelten eine dynamische Prozedur unter der Annahme, dass die kleinsten durch das Gitter aufgelösten Skalen den nicht aufgelösten Skalen ähnlich sind. Aus diesem Grund wird ein sogenannter Testfilter eingeführt. Die Weite dieses Filters  $\hat{\Delta}$  ist größer als die Weite des Gitterfilters  $\Delta$ . Als Basis für diese Methode dient die Germano-Identität

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}, \quad (3.34)$$

mit

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (3.35)$$

$$T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j, \quad (3.36)$$

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j. \quad (3.37)$$

Das Dach bezeichnet eine mit dem Testfilter gefilterte Größe. Die Germano-Identität repräsentiert die aufgelösten Spannungen der Skalen zwischen der Filterweite des Gitterfilters  $\Delta$  und der Filterweite des eingeführten Testfilters  $\hat{\Delta}$  (Germano 1992), wie Abbildung 3.3 verdeutlicht. Diese Beziehung ist exakt und der Tensor  $L_{ij}$  kann aus dem aufgelösten Strömungsfeld während der Berechnung bestimmt werden.

Werden nun die beiden Feinstruktur tensoren wie folgt modelliert:

$$\tau_{ij} = C \alpha_{ij}(\bar{u}), \quad (3.38)$$

$$T_{ij} = C \alpha_{ij}(\hat{\bar{u}}), \quad (3.39)$$

wobei der Tensor  $\alpha_{ij}$  das Feinstrukturmodell ohne die Modellkonstante darstellt, ergibt sich aus Gleichung (3.34) die Beziehung:

$$L_{ij} = C \alpha_{ij}(\hat{\bar{u}}) - C \alpha_{ij}(\bar{u}). \quad (3.40)$$

Als Basismodell kann ein algebraisches Feinstrukturmodell mit einer Modellkonstante gewählt werden, wie z. B. das Smagorinsky-Modell. Aus dieser Gleichung kann die Konstante nicht direkt bestimmt werden, da sie sich in einem gefilterten Produkt befindet (Ronchi, Ypma & Canuto 1992). Zur Bestimmung muss folgende Annahme gemacht werden:

$$C\widehat{\alpha_{ij}(\bar{u})} = C\hat{\alpha}_{ij}(\bar{u}). \quad (3.41)$$

Diese Annahme besitzt nur dann Gültigkeit, wenn  $C$  konstant über ein Intervall der Mindestlänge der Testfilterweite ist. In der Tat ist dies nicht der Fall. Akzeptiert man dies als Annahme, wird die Konstante durch die Minimierung des Feinstrukturfehlers  $E_{ij}$  bestimmt:

$$E_{ij} = L_{ij} - C\alpha_{ij}(\hat{u}) + C\hat{\alpha}_{ij}(\bar{u}). \quad (3.42)$$

Lilly (Lilly 1992) schlägt eine Minimierung der Fehlerdichte  $E_{ij}^2$  vor:

$$\frac{\partial E_{ij}E_{ij}}{\partial C}, \quad (3.43)$$

mit der Lösung

$$C = \frac{L_{ij}M_{ij}}{M_{ij}M_{ij}}, \quad (3.44)$$

wobei

$$M_{ij} = \alpha_{ij}(\hat{u}) - \hat{\alpha}_{ij}(\bar{u}). \quad (3.45)$$

Die Modellkonstante  $C$  kann also während der Rechnung durch Größen der Grobstruktur bestimmt werden. Anwendungen dieser Prozedur haben gezeigt, dass die dynamische Konstante  $C$  instationär ist und im Raum stark variiert. Somit ist die Annahme, die Gleichung (3.41) zugrunde liegt, nicht gültig. Weiterhin nimmt  $C$  sowohl sehr hohe als auch negative Werte an. Negative Werte führen zu negativer Wirbelviskosität. Diese Eigenschaften haben numerische Stabilitätsprobleme zur Folge. Um

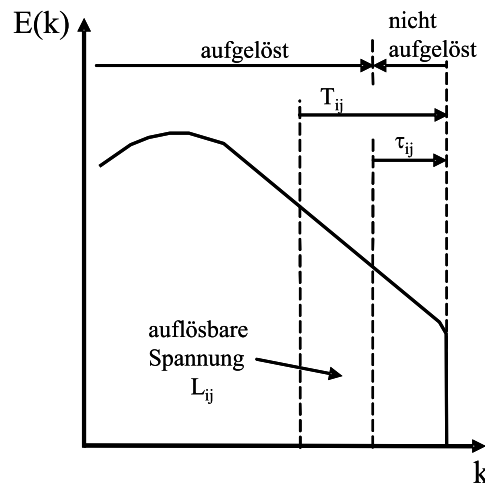


Abbildung 3.3: Energiespektrum mit verschiedenen Filterweiten gefiltert

diesen Problemen zu begegnen, schlagen Germano et al. (1991) vor, Zähler und Nenner der dynamischen Konstante über homogene Richtungen zu mitteln:

$$C = \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle}. \quad (3.46)$$

In komplexen Geometrien ohne homogene Richtungen ist diese Mittelung nicht möglich. Diese räumliche Mittelung kann auch durch eine zeitliche Mittelung ersetzt werden. Allerdings erhält man durch eine einfache zeitliche Mittelung eine dynamische Konstante  $C(x_i)$ , die nicht mehr von der Zeit abhängt. Alternativ erhält man durch eine Tiefpass-Filterung von der Form

$$C_f^{n+1} = (1 - \varepsilon)C^n + \varepsilon C^{n+1} \quad (3.47)$$

eine niederfrequente, zeitliche Abhängigkeit der dynamischen Konstante. Hier bezeichnen die hochgestellten Indizes  $n$  und  $n + 1$  den letzten und den aktuellen Zeitschritt. Mit einem Filterparameter  $\varepsilon$  in der Größenordnung von  $10^{-3}$  werden alle hochfrequenten Anteile herausgefiltert. Akselvoll & Moin (1993) sowie Breuer (2001) erzielen mit dieser Variante bessere Ergebnisse in ihren Berechnungen als mit einer zeitlich unabhängigen Konstante.

Für inhomogene und instationäre Strömungen schlagen Carati, Rogers & Wray (2002) eine Mittelung über parallel laufende Simulationen vor. Diese "*Ensemble Averaged Dynamic Procedure* (EADP)" wird in dieser Arbeit verwendet und in Kapitel 3.6.1 genauer beschrieben.

Um den numerischen Instabilitäten zu begegnen, können alternativ oder auch in Verbindung mit den erwähnten Mittelungen Begrenzungsregeln für die Wirbelviskosität eingeführt werden. Durch dieses sogenannte "Clipping" kann die Wirbelviskosität auf positive Werte begrenzt werden. Es können aber auch negative Werte in dem Maß zugelassen werden, dass die effektive Viskosität nicht negativ wird. Durch das Zulassen von negativen Werten kann der Backscatter-Effekt wiedergegeben werden. Analog dazu können die Werte auch nach oben begrenzt werden.

Die Anwendung dieser dynamischen Prozedur mit dem Smagorinsky-Modell als Basismodell wird allgemein als Germano-Modell bezeichnet. Durch die Einführung der dynamischen Bestimmung der Smagorinsky-Konstante ergeben sich einige Vorteile gegenüber dem Standard Modell:

- Die Konstante muss nicht mehr empirisch angepasst werden. Sie ist nicht mehr im ganzen Feld konstant, sondern passt sich dynamisch an.
- Eine Verwendung von Dämpfungsfunktionen in Wandnähe ist nicht notwendig.
- In laminaren Bereichen liefert das Modell automatisch keinen Beitrag mehr.
- Durch Zulassen von negativen Konstanten kann der Backscatter-Effekt wiedergegeben werden.



- Einziger Freiheitsgrad ist das Verhältnis von Testfilter- zu Gitterfilterweite  $\hat{\Delta}/\Delta$ . Numerische Tests zeigen einen optimalen Wert von  $\hat{\Delta} = 2\Delta$  (Sagaut 2001). Die Ergebnisse von Berechnungen zeigen jedoch nur eine geringe Abhängigkeit von der Wahl dieses Verhältnisses.
- Das dynamische Smagorinsky-Modell ist Skalen-Invariant, da als Längenmaß das Verhältnis der Weiten des Gitter- und Testfilters  $\hat{\Delta}/\Delta$  dient (Oberlack 1997).

### 3.5.2 Alternative Ansätze

#### 3.5.2.1 Lagranges Modell

Für inhomogene und instationäre Strömungen schlagen Meneveau, Lund & Cabot (1996) eine Mittelung entlang der Partikeltrajektorien vor. Sie begründen dies mit zwei Argumenten. Zum einen sind Partikeltrajektorien genau definierte, Galilei-invariante Objekte, die vollkommen unabhängig von Randbedingungen oder von Annahmen von statistischer Homogenität sind. Zum anderen zerfallen Wirbel entlang ihrer Trajektorien und wie Meneveau & Lund (1994) gezeigt haben, kann angenommen werden, dass die Energiekaskade entlang der Trajektorien stattfindet. Somit erscheint es physikalisch sinnvoll die Konstante über die "Entwicklungsgeschichte" der Partikel zu mitteln.

Der Ansatz führt zu zwei zusätzlichen Transportgleichungen, die gelöst werden müssen. Diese Gleichungen enthalten zusätzliche Parameter, wie das Zeitintervall über das gemittelt wird. Meneveau et al. (1996) erreichen bei Tests an isotroper Turbulenz sowie vollständig entwickelter und transitioneller Kanalströmung bessere oder zumindest gleichwertige Ergebnisse als mit der konventionellen dynamischen Prozedur. Die Nachteile dieser Methode sind die Lösung von zwei zusätzlichen Transportgleichungen, was zu einem deutlich erhöhten numerischen Aufwand führt, und die zusätzlichen freien Parameter, die der Philosophie des dynamischen Ansatzes widersprechen.

#### 3.5.2.2 Localization Model

Mit Hilfe eines Variationsansatzes berücksichtigen Ghosal *et al.* (1992, 1995) die räumliche Veränderung der Konstante. Die Konstante wird nicht aus der Filteroperation herausgezogen. Dies führt zu einer "Fredholm Integralgleichung zweiter Art". Die Lösung dieser Gleichung führt zu der räumlichen und zeitlichen Verteilung der dynamischen Konstante. Auch hier treten negative Werte für  $C$  auf und sorgen für numerische Stabilitätsprobleme. Durch die Nebenbedingung  $C \geq 0$  entsteht das "Constrained Dynamic Localization Model". Hierdurch wird aber der Backscatter-Effekt komplett unterdrückt. In der Modellvariante "K-Equation Dynamic Localization Model" wird die Wirbelviskosität in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Feinstrukturenergie  $k^{gs}$  bestimmt:

$$\tau_{ij} = -2Ck^{gs\frac{1}{2}}\bar{S}_{ij}. \quad (3.48)$$

Die Feinstruktur-Energie wird mittels einer weiteren Transportgleichung ermittelt. Dieser Ansatz lässt Backscatter zu, ohne zu Instabilitäten zu führen, da der rückwärtige Energietransfer durch die Energiebilanz begrenzt ist. Wie Ghosal et al. (1995) zeigen, ist dieses Modell numerisch stabil und Galilei-invariant, es genügt den Realizability-Bedingungen, zeigt korrektes Verhalten in Wandnähe und kann auch transitionelle Strömungen richtig wiedergeben. Allerdings führt das Modell nur zu geringfügigen Verbesserungen gegenüber der traditionellen dynamischen Prozedur bei erheblich erhöhtem numerischen Aufwand. Das Modell hat bisher keine breite Anwendung gefunden.

## 3.6 Herleitung und Analyse weiterer Feinstrukturmodelle

### 3.6.1 Ensemble Averaged Dynamic Procedure (EADP)

Wie oben beschrieben ist die dynamische Prozedur nach Germano et al. (1991) aufgrund der stark schwankenden dynamischen Konstante nicht ohne weiteres anwendbar. Für inhomogene und instationäre Strömungen schlagen Carati et al. (2002) eine Mittelung über parallel laufende Simulationen vor. Hierfür werden die Navier-Stokes-Gleichungen durch eine Gruppe von  $R$  Navier-Stokes-Gleichungen ersetzt:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^r}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i^r \bar{u}_j^r}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}^r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij}^r) - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j} \text{ mit } r = 1, \dots, R. \quad (3.49)$$

Für jede einzelne Simulation werden diese Gleichungen unabhängig voneinander gelöst. Für die Berechnung der Feinstrukturspannungen wird das traditionelle dynamische Smagorinsky-Modell verwendet. Zur Vermeidung von numerischen Instabilitäten wird die dynamische Konstante über die Simulationen gemittelt. In Abbildung 3.4 ist dieser Vorgang schematisch dargestellt. Die dynamische Konstante wird für jede der  $n$  parallel laufenden "Realisationen" separat für alle Gitterzellen bestimmt. Anschließend wird die Mittelung über diese Realisationen durchgeführt. Eine Mittelung über homogene Richtungen oder die Zeit findet nicht statt.

Diese parallel laufenden Simulationen müssen statistisch equivalent und unabhängig sein. LES sind statistisch equivalent, wenn das Rechengebiet und die Randbedingungen identisch sind. Die Anfangsbedingungen müssen den gleichen statistischen Bedingungen unterliegen. Sie sind jedoch nur unabhängig voneinander, falls die Anfangsbedingungen nicht miteinander korrelieren.

Carati et al. (2002) weisen darauf hin, dass der numerische Aufwand für diese Mittelung nicht viel höher sein muss als für eine einzelne Simulation. Bei LES ist man an statistischen Größen interessiert. Wenn  $t_t$  die Zeit von Simulationsbeginn bis zur vollentwickelten Turbulenz bezeichnet und  $t_s$  die Zeit ist um geeignete Statistiken zu erhalten, dann ist die Berechnungsdauer einer einzelnen LES  $t_t + t_s$ . Bei  $R$  parallelen Simulationen erhält man geeignete Statistiken bereits nach  $t_s/R$ . Die Rechenkosten für

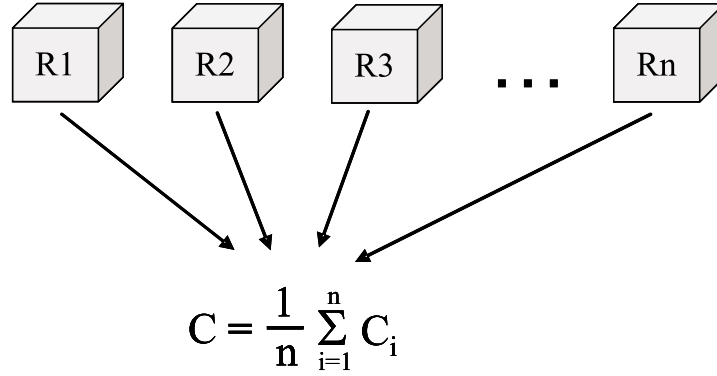


Abbildung 3.4: Funktionsweise der EADP

ein Ensemble an Simulationen beträgt folglich  $R(t_t + t_s/R)$ , also lediglich  $(R-1)t_t$  mehr. Wenn  $t_t \ll t_s$  gilt, dann ist der Mehraufwand sogar vernachlässigbar.

Diese Methode wurde an isotroper Turbulenz getestet. Ab einer Anzahl von 16 Realisationen sind die Ergebnisse fast unabhängig von der Anzahl der parallelen Simulationen über die gemittelt wird.

### 3.6.2 Energietransfer-Gleichgewichtsmodell

Der Unterschied zur klassischen dynamischen Methode besteht bei dieser Methode darin, dass der Feinstrukturfehler  $E_{ij}$  nicht auf der Germano-Identität beruht, sondern auf einer Gleichgewichtsannahme des Energietransfers zwischen verschiedenen Skalen. Murota (2003) schlägt diese Annahme als Grundlage für sein Modell vor, weil die klassische dynamische Prozedur für Wirbelviskositätsmodelle die Dissipation der Energie nicht garantiert.

Abbildung 3.5 zeigt die Einteilung des Energiespektrums in drei Teilbereiche. Unterteilt wird das Spektrum durch zwei Wellenzahlen  $k_T$  und  $k_G$ , die den Filterweiten des Testfilters bzw. des Gitterfilters entsprechen. Nach dem Modell der Energiekaskade wird die Energie von den großen zu den kleinen Skalen transferiert. Außerdem wird zusätzlich in allen Skalen Energie dissipiert.

Wird ein Energietransfer-Gleichgewicht in diesem Zwischenbereich angenommen, d.h. zwischen dem testgefilterten und dem gittergefilterten Strömungsfeld, ergibt sich folgende Beziehung:

$$\hat{\varepsilon}_g - \varepsilon_t - \widehat{\tau_{ij} \bar{S}_{ij}} + T_{ij} \hat{\bar{S}}_{ij} = 0. \quad (3.50)$$

mit

$$\varepsilon_t = 2\nu \hat{\bar{S}}_{ij} \hat{\bar{S}}_{ij}, \quad (3.51)$$

$$\hat{\varepsilon}_g = 2\nu \widehat{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}. \quad (3.52)$$

Hier sind  $\varepsilon_t$  und  $\varepsilon_g$  die Dissipationsrate des testgefilterten bzw. des gittergefilterten Spektrums.  $\hat{\varepsilon}_{sgs}$  bezeichnet die Dissipationsrate des Feinstrukturbereichs.

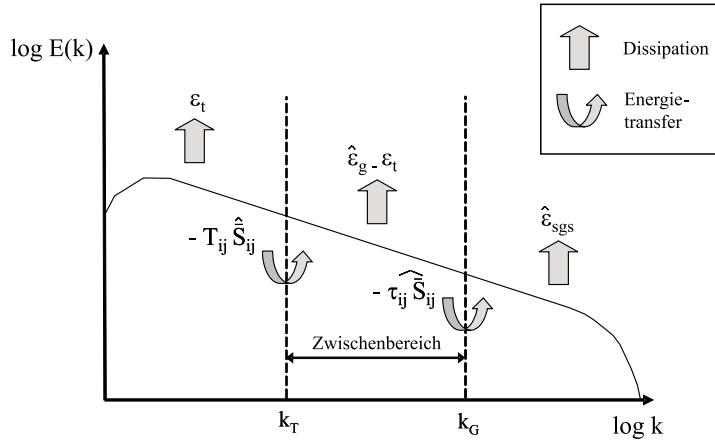


Abbildung 3.5: Dissipation und Energietransfer im Energiespektrum

Murota (2003) entwickelt aus dieser Annahme ein Modell, das viele Beschränkungen aufweist, z. B. ist das Modell durch weitere Annahmen nur mit der Finite Volumen Methode und mit orthogonalen Gittern anwendbar. Nimmt man aber Gleichung (3.50) als Definition des Fehlers  $E_{ij}$ :

$$E_{ij} = \hat{\varepsilon}_g - \varepsilon_t - \widehat{\tau_{ij} \bar{S}_{ij}} + T_{ij} \hat{S}_{ij} \quad (3.53)$$

und minimiert das Fehlerquadrat nach C:

$$\frac{\partial E_{ij} E_{ij}}{\partial C}, \quad (3.54)$$

so ergibt sich unter Verwendung der Annahme (3.41) folgende Lösung für die dynamische Konstante C:

$$C = \frac{\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_g}{\alpha_{ij}(\hat{u}) \hat{S}_{ij} - \alpha_{ij}(\bar{u}) \bar{S}_{ij}} = \frac{2\nu \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} - 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}{\alpha_{ij}(\hat{u}) \hat{S}_{ij} - \alpha_{ij}(\bar{u}) \bar{S}_{ij}}, \quad (3.55)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die Konstante eines Modells dynamisch bestimmen. Theoretisch wird durch diese Prozedur die Modellkonstante so ermittelt, dass durch das Modell die richtige Menge an Energie dissipiert wird.

### 3.6.3 Nichtlineares dynamisches Modell nach Lund und Novikov

Das Smagorinsky-Modell bzw. seine dynamische Variante ist immer noch eines der am häufigsten benutzten Modelle, obwohl seit über 25 Jahren bekannt ist, dass die modellierten Feinstrukturspannungen nur eine schlechte Übereinstimmung mit den tatsächlichen Spannungen haben. Aus diesem Grund entwickelten Lund & Novikov (1992) ein anisotropes Feinstrukturmodell basierend auf der Scher- und Rotationsrate. Es gibt keinen Grund die Rotation in einem Modell für den turbulenten Trans-

port nicht zu berücksichtigen. Es wird sogar angenommen, dass die Aufweitung der Wirbel ein wesentlicher Mechanismus ist, um die Energie von den größeren in die kleineren Skalen weiterzuleiten (Pope 2000).

Modelle basierend auf dem Scher- und Rotationstensor sind bekannt aus dem Kontext der RANS-Modellierung. Solche Modelle werden nichtlineare Reynolds-Spannungsmodelle genannt (Pope 1975, Speziale 1987, Gatski & Speziale 1993).

Die Annahme, die dem Modell zugrunde liegt, ist, dass die Feinstrukturspannungen sowohl von der Scher- als auch von der Rotationsrate abhängen:

$$\tau_{ij} = f(\bar{S}_{ij}, \bar{R}_{ij}, \delta_{ij}). \quad (3.56)$$

Hier ist  $\delta_{ij}$  der isotrope Einheitstensor und der Scher- und Rotationstensor sind wie folgt definiert:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.57)$$

$$\bar{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.58)$$

Wird der symmetrische Feinstrukturspannungstensor als Integritätsbasis ausgedrückt und werden Tensorprodukte ab der vierten Ordnung vernachlässigt, erhält man ein Modell bestehend aus fünf Termen mit jeweils einer Modellkonstante:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^* &= C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^* \\ &+ C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^* + C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}) \\ &+ C_5 \Delta^2 \frac{1}{|\bar{S}|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}). \end{aligned} \quad (3.59)$$

$\Delta$  ist die Weite des Gitterfilters,  $|\bar{S}| = \sqrt{\text{tr}(\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})}$  und  $()^*$  bezeichnet den spurfreien Teil des Tensors. Die Herleitung des Modells ist in (Lund & Novikov 1992) detailliert beschrieben. Im folgenden werden die einzelnen Terme mit Term 1, Term 2, usw. benannt.

Lund & Novikov (1992) führten einige *a priori* Tests mit gefilterten DNS Daten von homogener, isotroper Turbulenz durch. Das Smagorinsky-Modell (Term 1) ist der führende Term in dem Modell. Das Hinzufügen weiterer Terme führte zu keiner signifikanten Verbesserung der Ergebnisse. Das Modell wurde nie in einer Grobstruktursimulation verwendet. Hier wird darauf hingewiesen, dass Piomelli et al. (1988) gezeigt haben, dass *a priori*-Analysen nur qualitative Abschätzungen der Leistungsfähigkeit eines Modells zulassen, jedoch keine genauen quantitativen. Außerdem ist fraglich, wie die einzelnen Terme in komplexen Strömungen das Ergebnis beeinflussen.

Razafindralandy & Hamdouni (2006) weisen darauf hin, dass das Modell die Skalensymmetrie bricht und der vierte und fünfte Term die 2DMFI nicht einhalten.

Kosović (1997) schlägt ein Modell vor in dem die Terme 1, 2 und 4 enthalten sind. Term 3 wird vernachlässigt, weil er zu fehlerhaften Ergebnissen in isotroper Turbulenz bezogen auf eine Festkörperrotation führt (Gatski & Speziale 1993). Die Modellkonstanten werden analytisch bestimmt. Wang & Bergstrom (2005) greifen dieses Modell auf und bestimmen die drei Modellparameter dynamisch.

Der Rechenaufwand steigt exponentiell mit der Anzahl der zu bestimmenden dynamischen Konstanten an. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit die einzelnen Terme als Modelle und Kombinationen aus zwei Termen als Modelle betrachtet. Somit werden insgesamt 15 Modelle untersucht.

Hieraus ergeben sich folgende Einzelterm-Modelle:

$$\text{Term 1: } \tau_{ij}^* = C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}, \quad (3.60)$$

$$\text{Term 2: } \tau_{ij}^* = C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^*, \quad (3.61)$$

$$\text{Term 3: } \tau_{ij}^* = C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^*, \quad (3.62)$$

$$\text{Term 4: } \tau_{ij}^* = C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}), \quad (3.63)$$

$$\text{Term 5: } \tau_{ij}^* = C_5 \Delta^2 \frac{1}{|S|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}). \quad (3.64)$$

Folgende Doppelterm-Modelle sind zu untersuchen:

$$\text{Term 1+2: } \tau_{ij}^* = C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^*, \quad (3.65)$$

$$\text{Term 1+3: } \tau_{ij}^* = C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^*, \quad (3.66)$$

$$\text{Term 1+4: } \tau_{ij}^* = C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}), \quad (3.67)$$

$$\text{Term 1+5: } \tau_{ij}^* = C_1 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + C_5 \Delta^2 \frac{1}{|S|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}), \quad (3.68)$$

$$\text{Term 2+3: } \tau_{ij}^* = C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^* + C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^*, \quad (3.69)$$

$$\text{Term 2+4: } \tau_{ij}^* = C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^* + C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}), \quad (3.70)$$

$$\text{Term 2+5: } \tau_{ij}^* = C_2 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj})^* + C_5 \Delta^2 \frac{1}{|S|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}), \quad (3.71)$$

$$\text{Term 3+4: } \tau_{ij}^* = C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^* + C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}), \quad (3.72)$$

$$\text{Term 3+5: } \tau_{ij}^* = C_3 \Delta^2 (\bar{R}_{ik} \bar{R}_{kj})^* + C_5 \Delta^2 \frac{1}{|S|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}), \quad (3.73)$$

$$\text{Term 4+5: } \tau_{ij}^* = C_4 \Delta^2 (\bar{S}_{ik} \bar{R}_{kj} - \bar{R}_{ik} \bar{S}_{kj}) + C_5 \Delta^2 \frac{1}{|S|} (\bar{S}_{ik} \bar{S}_{kl} \bar{R}_{lj} - \bar{R}_{ik} \bar{R}_{kl} \bar{S}_{lj}). \quad (3.74)$$

Die Bestimmung der dynamischen Konstanten wird, wie unter 3.5.1 beschrieben, nach der Methode von Germano mit der Modifikation nach Lilly durchgeführt. Für Modelle mit zwei Termen und somit auch zwei Modellkonstanten

$$\tau_{ij} = C_\alpha \alpha_{ij}(\bar{u}) + C_\beta \beta_{ij}(\bar{u}) \quad (3.75)$$

ist der Feinstrukturfehler gegeben durch:

$$E_{ij}(C_\alpha, C_\beta) = L_{ij} + C_\alpha M_{ij} + C_\beta N_{ij}, \quad (3.76)$$

mit

$$L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}, \quad (3.77)$$

$$M_{ij} = \alpha_{ij}(\widehat{u}) - \widehat{\alpha_{ij}(\overline{u})}, \quad (3.78)$$

$$N_{ij} = \beta_{ij}(\widehat{u}) - \widehat{\beta_{ij}(\overline{u})}. \quad (3.79)$$

Eine Minimierung der Fehlerdichte  $E_{ij}^2$  führt zu einem Gleichungssystem mit dem die zwei dynamischen Konstanten bestimmt werden können:

$$\begin{bmatrix} M_{ij}M_{ij} & N_{ij}M_{ij} \\ M_{ij}N_{ij} & N_{ij}N_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha \\ C_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{ij}M_{ij} \\ -L_{ij}N_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Durch die dynamische Bestimmung der Konstanten hält das Modell die Skalensymmetrie ein.





## 4 Numerische Diskretisierung

Die Navier-Stokes-Gleichungen können aufgrund ihrer Nichtlinearität nicht analytisch gelöst werden. Eine numerische Lösung des Gleichungssystems ist jedoch möglich. Eine genaue Beschreibung der numerischen Vorgehensweise wird in diesem Kapitel beschrieben. Laut Ferziger & Perić (2002) beinhaltet ein numerisches Lösungsverfahren ein mathematisches Modell, eine Diskretisierungsmethode, ein Koordinaten- und Basisvektorensystem, ein numerisches Gitter, eine finite Näherungs- und Lösungsmethode. In dieser Arbeit wurde das CFD-Programm FASTEST-3D (Flow Analysis Solving Transport Equations Simulating Turbulence 3 Dimensional) verwendet und um die in Kapitel 3.6 beschriebenen Feinstrukturmodelle bzw. dynamischen Prozeduren erweitert. Das Programm wurde ursprünglich von der INVENT Computing GmbH (Erlangen, Deutschland) entwickelt. Es wird zur Zeit vom Fachgebiet für numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau an der Technischen Universität Darmstadt verwaltet und weiterentwickelt.

Das Programm FASTEST-3D basiert auf der Finite Volumen Diskretisierung. Wichtige Merkmale sind die Verwendung von dreidimensionalen, randangepassten, nichtorthogonalen, blockstrukturierten Gittern. Die wichtigsten Elemente der numerischen Methode werden im folgenden für orthogonale Gitter beschrieben. In FASTEST-3D ist die Verwendung von nichtorthogonalen Gittern möglich. Für solche Gitter wird für jedes Kontrollvolumen ein lokales Koordinatensystem eingeführt und eine Koordinatentransformation ist erforderlich. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf diese Koordinatentransformation nicht eingegangen. Sie ist detailliert in Ferziger & Perić (2002) beschrieben.

### 4.1 Finite Volumen Methode

Ziel der numerischen Diskretisierung ist es, die partiellen Differentialgleichungen in eine lösbare algebraische Form umzuwandeln. Bei der Finiten Volumen Methode werden die Differentialgleichungen dazu über Kontrollvolumen integriert:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \psi) dV}_{\text{instationärer Term}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \psi) dV}_{\text{Konvektionsterm}} = \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dV}_{\text{Diffusionsterm}} + \underbrace{\int_V S_\psi dV}_{\text{Quellterm}}. \quad (4.1)$$

Hier ist die allgemeine Transportgleichung dargestellt, wobei  $\psi$  eine beliebige Größe ist, wie z.B. eine Geschwindigkeitskomponente oder ein Skalar.  $\Gamma_\psi$  stellt den Transportkoeffizienten der Größe  $\psi$  dar, wie z.B. die Viskosität oder die Diffusivität, und  $S_\psi$  ist die Summe aller Quell- und Senkenterme. Mit Hilfe des Gaußschen Divergenz-

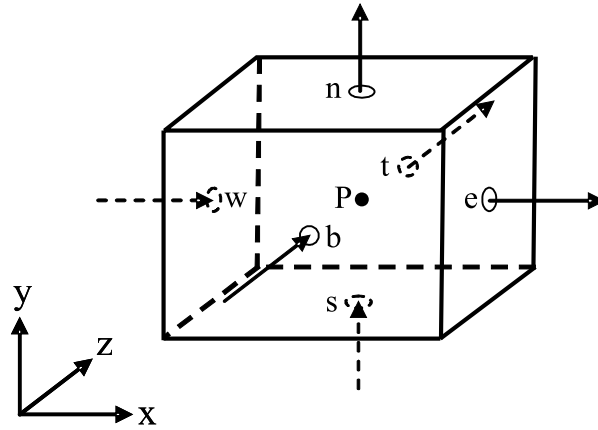


Abbildung 4.1: Position der Strömungsgrößen an einem Kontrollvolumen

theorems können die Volumenintegrale des Konvektions- und des Diffusionsterms in Oberflächenintegrale transformiert werden:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi) dV + \int_{\sigma} \left( \rho u_i \psi - \Gamma_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) n_i d\sigma = \int_V S_{\psi} dV. \quad (4.2)$$

$\sigma$  beschreibt hier die Oberfläche des Volumens und  $n_i$  ist die Komponente des Einheitsnormalenvektors  $\vec{n}$ , der Normal zur Oberfläche steht und immer nach außen zeigt. Das Rechengebiet wird durch ein sogenanntes Rechengitter in eine endliche Anzahl ausreichend kleiner Kontrollvolumen zerteilt. Gleichung (4.2) muss in jedem Kontrollvolumen gelöst werden. In FASTEST-3D wird das Rechengebiet in Hexaeder zerteilt. Abbildung 4.1 zeigt ein Kontrollvolumen P. Jedes Hexaeder ist durch seine Eckpunkte und die sechs damit beschriebenen Außenflächen w, e, n, s, t und b begrenzt. Jedem Kontrollvolumen ist ein Rechenknoten zugeordnet, der im Mittelpunkt des jeweiligen Kontrollvolumen liegt. Die Werte im Mittelpunkt stellen jeweils das Mittel der Strömungsgrößen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $p$  über das gesamte Kontrollvolumen dar. Die Pfeile in Abbildung 4.1 deuten die Massenflüsse  $\dot{m}$  durch die jeweilige Fläche an.

Der Vorteil der Finite Volumen Methode gegenüber anderen Methoden (z. B. Finite Elemente Methode oder Finite Differenzen Methode) ist die implizite Konservativität, d.h. die Massenerhaltung wird erfüllt. Gleichung (4.2) gilt sowohl für jedes Kontrollvolumen als auch für das gesamte Rechengebiet, denn eine Aufsummierung der Gleichung für alle Kontrollvolumen führt zur globalen Erhaltungsgleichung, weil sich alle inneren Oberflächenintegrale gegenseitig aufheben. Die Oberflächen- und Volumenintegrale müssen approximiert werden, um die Differentialgleichung (4.2) in eine algebraische Form zu überführen.

## 4.2 Diskretisierung

Ein hexaederförmiges Kontrollvolumen, bezeichnet mit dem Index P, besitzt sechs benachbarte Kontrollvolumen: W (west), E (east), N (north), S (south), T (top) und

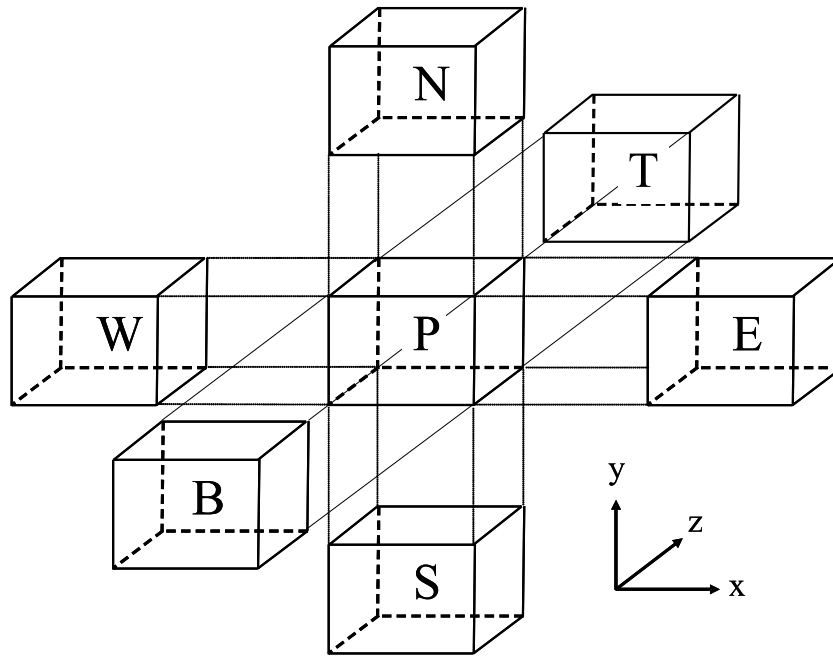


Abbildung 4.2: Nachbarbeziehungen der Kontrollvolumen

B (bottom). Abbildung 4.2 verdeutlicht die Beziehungen zwischen den benachbarten Kontrollvolumen.

Die benachbarten Volumen teilen sich jeweils eine gemeinsame Fläche mit dem Kontrollvolumen P. So ist z.B. die östliche Fläche e des Kontrollvolumen P identisch mit der westlichen Fläche w des Kontrollvolumen E. Werte auf diesen Flächen sind betragsmäßig gleich, unterscheiden sich aber je nach Zugehörigkeit vom Vorzeichen aufgrund des Normalenvektors.

Ziel der Diskretisierung ist es, die integrale Differentialgleichung (4.2) in eine algebraische Gleichung der Form

$$A_P \psi_P - \sum_{Nb} A_{Nb} \psi_{Nb} = S_P \quad (4.3)$$

zu überführen. Hier bezeichnet der Index  $Nb$  die sechs benachbarten Kontrollvolumen,  $A_P$  und  $A_{Nb}$  sind die aus der Diskretisierung hervorgegangenen Koeffizienten der variablen Größe  $\psi_P$ ,  $\psi_{Nb}$  in den zugehörigen Kontrollvolumen P und Nb. Auf der rechten Seite von Gleichung (4.3) werden alle Terme, die nicht in dem impliziten Teil enthalten sind, in dem Quellterm  $S_P$  zusammengefasst. Um Gleichung (4.3) zu erhalten, ist es notwendig die Oberflächen- und Volumenintegrale mit ihren Integranden durch Ausdrücke mit bekannten Größen anzunähern.

Die gesamte Oberfläche eines Kontrollvolumen ist eingeteilt in sechs Teilflächen. Das Oberflächenintegral über die konvektiven und diffusiven Flüsse in Gleichung (4.2)

kann somit in die Summe der sechs Teilflächen des Kontrollvolumen aufgespalten werden:

$$\int_{\sigma} \left( \rho u_i \psi - \Gamma_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) n_i d\sigma = \sum_j \int_{\sigma_j} \left( \rho u_i \psi - \Gamma_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) n_i d\sigma_j, \quad (4.4)$$

wobei der Index  $j$  über alle Seitenflächen läuft. Für benachbarte Kontrollvolumen mit gemeinsamer Fläche ist der Fluss durch diese Fläche betragsmäßig gleich, lediglich die Vorzeichen unterscheiden sich.

### 4.2.1 Approximation der Oberflächenintegrale

Zur Bestimmung der Oberflächenintegrale müssen die Werte des Integranden aus den Zellmittelpunkten der Kontrollvolumen approximiert werden. Eine Möglichkeit ist die Anwendung der Mittelpunktsregel, welche ein Verfahren zweiter Ordnung darstellt:

$$\int_{\sigma_i} \psi d\sigma_i \approx \psi_{m_i} \delta\sigma_i. \quad (4.5)$$

Das Integral wird hier durch das Produkt des Integranden im Mittelpunkt der Oberfläche  $\psi_{m_i}$  und der Fläche der Oberfläche  $\delta\sigma_i$  approximiert. Hierbei wird  $\psi_{m_i}$  aus den benachbarten Zellmittelpunkten angenähert und die Fläche ist durch die Geometrie gegeben.

Diese Approximation wird im folgenden beispielhaft für die Ostseite eines Kontrollvolumens durchgeführt. Wird diese Näherung nun auf die Oberflächenintegrale in Gleichung (4.4) angewendet, ergibt sich der konvektive Fluss zu

$$\int_{\sigma_e} (\rho u_i \psi n_i)_e d\sigma_e \approx (\rho u_i n_i)_e \delta\sigma_e \psi_{m_e} = \dot{m}_e \psi_{m_e} \quad (4.6)$$

und der diffusive Fluss zu

$$\int_{\sigma_e} \left( \Gamma_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} n_i \right)_e d\sigma_e \approx \left( \Gamma_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} n_i \right)_e \delta\sigma_e \psi_{m_e}. \quad (4.7)$$

Hier ist  $\dot{m}$  der Massenfluss durch die betrachtete Fläche. Die Massenbilanz muss für jedes Kontrollvolumen erfüllt sein:

$$\sum_{\sigma_i} \dot{m}_i = 0. \quad (4.8)$$

Mit dem Zentralkifferenzenschema wird  $\psi_{m_e}$  durch lineare Interpolation der Werte aus den benachbarten Kontrollvolumen bestimmt:

$$\psi_{m_e} \approx \psi_E \gamma_e + \psi_P (1 - \gamma_e). \quad (4.9)$$

Den Wert im Kontrollvolumenmittelpunkt im östlichen Kontrollvolumen stellt  $\psi_E$  dar und  $\psi_P$  ist der Wert im betrachteten Kontrollvolumen. Der Interpolationsfaktor ist definiert durch

$$\gamma_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}. \quad (4.10)$$

Dieses Schema ist ein Verfahren zweiter Ordnung. Gegenüber Verfahren erster Ordnung wie dem Upwind-Verfahren hat es den Vorteil der höheren Genauigkeit, allerdings auf Kosten der Stabilität. Für LES sind Verfahren erster Ordnung aufgrund der numerischen Diffusion nicht zu verwenden.

Für die Näherung des diffusiven Flusses muss die partielle Ableitung  $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$  approximiert werden. Auch hier wird das Zentralsdifferenzschema angewendet:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_e \approx \frac{\psi_E - \psi_P}{x_E - x_P}. \quad (4.11)$$

Für äquidistante Gitter ergibt sich ein Fehler zweiter Ordnung. Bei nicht äquidistanten Gittern erhöht sich der Fehler mit dem Größenunterschied der benachbarten Zellen. Bei der Gittergenerierung sollte folglich auf ein Expansionsverhältnis benachbarter Gitterabstände nahe Eins geachtet werden.

## 4.2.2 Approximation der Volumenintegrale

Bei der Näherung der Volumenintegrale wird ebenfalls die Mittelpunktsregel angewendet. Das Volumenintegral wird ersetzt durch das Produkt des Wertes des Integranden im Kontrollvolumenmittelpunkt und des Volumens des Kontrollvolumens:

$$\int_V f dV \approx f_P \delta V_P. \quad (4.12)$$

Diese Approximation wird auf den instationären Term sowie auf den Quellterm angewendet. Einige Volumenintegrale können Gradienten von bestimmten Größen beinhalten, wie z. B. den Druckgradienten in den Navier-Stokes-Gleichungen. Durch die Anwendung des Gaußschen Satzes und der Mittelpunktsregel ergibt sich:

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_\sigma p n_i d\sigma = \sum_j \int_{\sigma_j} p n_i d\sigma_j \approx \sum_j (p n_i)_{m_j} \delta \sigma_j. \quad (4.13)$$

Der Druck in den Mittelpunkten der Teilflächen des Kontrollvolumens  $p_{m_j}$  wird durch lineare Interpolation zweiter Ordnung zwischen den Werten in den Mittelpunkten der benachbarten Kontrollvolumen ermittelt:

$$p_{m_e} = \gamma_{e1} p_E + \gamma_{e2} p_P, \quad (4.14)$$

mit den entsprechenden Interpolationsfaktoren  $\gamma_{e1}$  und  $\gamma_{e2}$ .

### 4.2.3 Zeitliche Diskretisierung

Durch die oben genannten Approximationen erhält man die allgemeine Transportgleichung in ihrer diskretisierten Form für jedes Kontrollvolumen  $i$ :

$$\frac{(\partial \rho \psi_{i,P})}{\partial t} \delta V = -a_{i,P} \psi_{i,P} - \sum_{Nb} a_{i,Nb} \psi_{i,Nb} + S_P. \quad (4.15)$$

Die Koeffizienten werden zusammengefasst, so dass für jedes Kontrollvolumen mit dem Mittelpunkt  $P$  gilt:

$$a_{i,P} = \sum_{Nb} a_{i,Nb}. \quad (4.16)$$

In Gleichung 4.15 ist der instationäre Term noch zu diskretisieren. Hierzu wird das zu betrachtende Zeitintervall in Teilintervalle  $\Delta t_n$  zerlegt. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird ein Variablenwert zum Zeitpunkt  $t_n$  mit dem hochgestellten Index  $n$  bezeichnet, z. B.

$$\psi(t_{n+1}) = \psi^{n+1}. \quad (4.17)$$

Zur Zeitdiskretisierung wird das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet. Diese implizite Diskretisierungsmethode erhält man, indem für jede Komponente der Variablen  $\psi_i$  die Zeitableitung zum Zeitpunkt  $t_{n+\frac{1}{2}}$  durch die Steigung der Geraden zwischen  $\psi_i^{n+1}$  und  $\psi_i^n$  approximiert wird. Mit den zeitabhängigen Variablen  $\rho$  und  $u_i$  ergibt sich aus Gleichung (4.15):

$$\begin{aligned} \frac{(\rho u_{i,P} \delta V)^{n+1} - (\rho u_{i,P} \delta V)^n}{\Delta t} &= 0.5 \left[ -a_{i,P}^{n+1} u_{i,P}^{n+1} + \sum_{Nb} a_{i,Nb}^{n+1} u_{i,Nb}^{n+1} + S_P^{n+1} \right] \\ &+ 0.5 \left[ -a_{i,P}^{n+1} u_{i,P}^n + \sum_{Nb} a_{i,Nb}^{n+1} u_{i,Nb}^n + S_P^n \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der zeitliche Abbruchfehler dieses Verfahrens ist zweiter Ordnung. Es kann gezeigt werden, dass es das genaueste Verfahren dieser Ordnung ist (Schäfer 1999).

### 4.2.4 Druck-Korrektur-Verfahren

Mit der diskretisierten Impulserhaltungs- und Kontinuitätsgleichung soll ein Druck- und Geschwindigkeitsfeld ermittelt werden. Um dieses gekoppelte Gleichungssystem zu lösen, ist ein Druckkorrekturverfahren notwendig, denn der Druck ist lediglich in den Impulserhaltungsgleichungen enthalten. Das hier verwendete Verfahren ist das sogenannte SIMPLE-Verfahren (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations). In FASTEST-3D ist das Verfahren von Rhie und Chow (Rhie & Chow 1983) implementiert.

Der Ablauf ist durch zwei Schritte gekennzeichnet, den Prädiktor- und den Korrektorschritt. Im ersten Schritt werden ausgehend von der Anfangsbelegung die Im-

pulsgleichungen gelöst. Setzt man das errechnete Geschwindigkeitsfeld in die Kontinuitätsgleichung ein, kommt es aufgrund des unkorrekten Druckfeldes zu einem Massendefekt. Durch Umformen der Gleichungen kann ein zu dieser Massenquelle passendes Druckfeld errechnet werden. Um diesen Massendefekt auszugleichen, wird im darauf folgenden Korrektorschritt eine Geschwindigkeitskorrektur berechnet und durchgeführt. Im Falle der Konvergenz wird der nächste Zeitschritt berechnet, ansonsten wird eine weitere Iteration durchgeführt und mit einem weiteren Prädiktorschritt und darauf folgenden Korrektorschritt begonnen.

### 4.3 Lösungsverfahren

Das zu lösende Gleichungssystem in FASTEST hat die Form

$$\mathbf{A}\psi = \mathbf{s}, \quad (4.19)$$

wobei  $\mathbf{A}$  die Koeffizientenmatrix mit  $n \times n$  Elementen darstellt.  $\psi$  und  $\mathbf{s}$  sind  $n$ -dimensionale Vektoren der gesuchten Variable und der Quellterme. Zur Lösung des Systems wird der SIP-Solver (Strongly Implicit Procedure) von Stone (Stone 1968) verwendet. Dieser iterative Löser berechnet von einer geschätzten Anfangslösung  $\psi^0$  eine Folge von Näherungen  $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n$  bis die Abbruchkriterien erfüllt sind. Für eine Iteration gilt:

$$\mathbf{A}\psi^n = \mathbf{s} + \mathbf{r}^n, \quad (4.20)$$

wobei  $\mathbf{r}^n$  den Residuenvektor darstellt. Der Löser beruht auf einer Matrizenzerlegung von der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}. \quad (4.21)$$

Der auf dieser Zerlegung basierende Algorithmus lässt sich darstellen mit:

$$\mathbf{M}\psi^{n+1} = \mathbf{N}\psi^n - \mathbf{b}. \quad (4.22)$$

Im Falle der Konvergenz gilt  $\mathbf{b} = \mathbf{s}$ . Um schnelles Konvergieren zu gewährleisten, sollte  $\mathbf{M}$  eine gute Approximation von  $\mathbf{A}$  sein und folglich  $\mathbf{N}$  klein sein. Subtrahiert man nun  $\mathbf{M}\psi^n$  von Gleichung (4.22), erhält man:

$$\mathbf{M}\delta^n = \mathbf{r}^n. \quad (4.23)$$

Hier ist  $\delta^n = \psi^{n+1} - \psi^n$  der Korrekturvektor. Um das System effizient zu lösen, wird eine unvollständige LU-Zerlegung durchgeführt. Die Matrix  $\mathbf{M}$  wird in eine untere und eine obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  aufgespalten:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}. \quad (4.24)$$

Nachdem  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  bestimmt sind, werden die inneren Iterationen durchgeführt. Der Residuenvektor  $\mathbf{r}_L^n$  wird bestimmt durch:

$$\mathbf{r}_L^n = \mathbf{U}\delta^n = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}^n. \quad (4.25)$$

Die Vorteile der LU Zerlegung nutzend, werden zuerst die Elemente des Vektors  $\mathbf{r}_L^n$  berechnet. Danach werden die Elemente des Korrekturvektors  $\delta^n$  bestimmt. Anschließend werden die Elemente der Variablen durch  $\psi^{n+1} = \psi^n + \delta^n$  korrigiert. Diese Iterationen werden durchgeführt bis das Abbruchkriterium erfüllt ist, d.h. bis die Summe der Elemente des Residuenvektors  $\mathbf{r}^n$  einen vorgegebenen Wert unterschreitet.



## 5 Large-Eddy Simulation ausgewählter turbulenter Strömungen

Zur Evaluierung der in Kap. 3.6 beschriebenen Modelle werden drei Testfälle mit steigendem Komplexitätsgrad gerechnet. Zum ersten Vergleich der Modelle wird eine vollentwickelte, turbulente, ebene Kanalströmung simuliert. Diese besitzt zwei homogene Richtungen. Durch den Einsatz von periodischen Randbedingungen entfällt die Problematik der Einstrom- und Ausstromrandbedingung. An diesen Rändern sind die Geschwindigkeiten in der Regel unbekannt und müssen vorgegeben bzw. approximiert werden. Der zweite Testfall beschreibt eine zurückspringende Stufe. Die Anwendung der dynamischen Prozedur ist hier durch eine homogene Richtung möglich. Die Einstromrandbedingung muss hier allerdings generiert werden, da in Fließrichtung keine periodischen Randbedingungen eingesetzt werden können. An der Stufe löst die Strömung ab, was die Komplexität der Strömung erhöht. Als dritter Testfall wird die Umströmung eines wandgebundenen Würfels in einem ebenen Kanal gerechnet. Homogene Richtungen sind hier nicht vorhanden. Der Einsatz der Germano-Prozedur ist nur durch alternative Mittelungen, zeitliche Filterung oder extremes Begrenzen der dynamischen Konstante möglich. Durch Ablösungen an verschiedenen Punkten ist die korrekte Beschreibung dieser Strömung eine große Herausforderung.

### 5.1 Turbulente, ebene Kanalströmung

#### 5.1.1 Beschreibung des Testfalls

Als Kanalströmung wird eine Strömung zwischen zwei ebenen Platten mit unendlicher Ausdehnung bezeichnet. Durch die unendliche Ausdehnung wird ein vollständig ausgebildetes Strömungsprofil erreicht. Diese Strömung ist ein häufig verwendeter Testfall, weil sie alle charakteristischen Merkmale wandgebundener turbulenter Strömungen beinhaltet. Durch die Anwendung von periodischen Randbedingungen ist sie außerdem numerisch leicht zu berechnen. Die homogenen Richtungen erlauben den Einsatz von spektralen Verfahren, die in Genauigkeit und Konvergenzverhalten ihre Vorteile haben. Die einfache Geometrie ermöglicht den Einsatz von kartesischen Gittern. Außerdem ist die Kanalströmung durch Direkte Numerische Simulationen detailliert beschrieben und dokumentiert. Hier wird eine Kanalströmung mit einer turbulenten Reynoldszahl bezogen auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  und die halbe Kanalhöhe  $\delta$  von

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = 395 \quad (5.1)$$

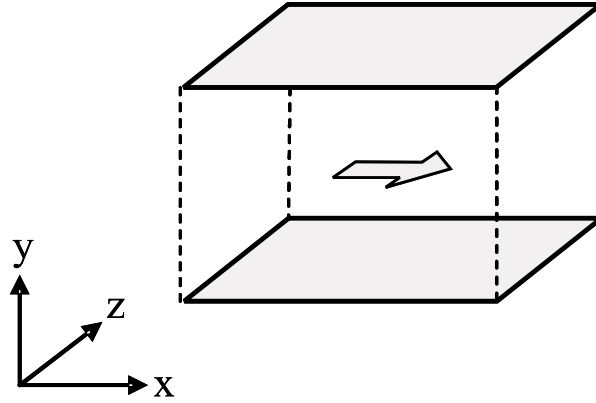


Abbildung 5.1: Rechengebiet einer Kanalströmung

simuliert. Die Ergebnisse werden mit einer DNS-Berechnung von Moser, Kim & Mansour (1999) verglichen. Die Daten sind mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} \quad (5.2)$$

entdimensioniert. Hier ist  $\tau_w$  die Wandschubspannung.

In Abbildung 5.1 ist ein Rechengebiet für eine solche Kanalströmung schematisch dargestellt. Der Pfeil deutet die Hauptströmungsrichtung an. Der Abstand zwischen den Platten beträgt  $2\delta$ . Das Rechengebiet hat die Ausmaße von  $2\pi\delta$  in x- und  $\pi\delta$  in z-Richtung. Diese Strömung besitzt homogene Richtungen, die Hauptströmungsrichtung und die Spannweitenrichtung, d. h. die statistischen Größen der Turbulenz ändern sich in diesen Richtungen nicht.

#### 5.1.1.1 Rand- und Anfangsbedingungen

An den Wänden gilt die Haftbedingung, d.h. Fluidteilchen an der Wand bewegen sich mit der Geschwindigkeit der Wand. In x- und z-Richtung gelten periodische Randbedingungen. Die Problematik der Einström- und Ausströmrandbedingung wird hiermit umgangen. Eine Bedingung für den Einsatz der periodischen Randbedingungen ist, dass die Größe des Rechengebietes in homogenen Richtungen dabei so gewählt wird, dass auf halber Länge die Fluktuationen der Turbulenz unkorreliert sind (Kim, Moin & Moser 1987). Die Strömung wird durch einen Druckgradienten angetrieben. Neben einer Simulation mit konstantem Druckgradienten gibt es die Möglichkeit den Massenfluss konstant zu halten. Der Druckgradient muss dann entsprechend korrigiert werden. Der Druckgradient für den nächsten Zeitschritt berechnet sich dann wie folgt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^{n+1} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^n - \frac{\rho}{\Delta t} (U_b^0 + U_b^n - 2U_b^{n+1}), \quad (5.3)$$

wobei  $U_b$  die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit und  $\Delta t$  die Zeitschrittweite sind.  $U_b^0$  beschreibt den Ausgangs- bzw. Zielwert. Dieses Verfahren wird in die-

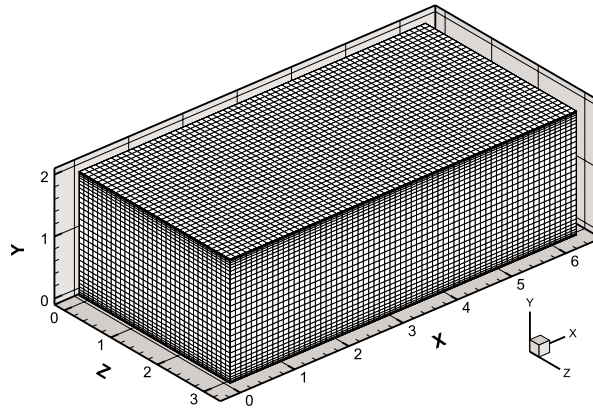


Abbildung 5.2: Gitterauflösung einer Kanalströmung

ser Arbeit verwendet. Gegebenenfalls muss die Korrektur mit einem Unterrelaxationsparameter abgemindert werden.

Im gesamten Rechengebiet sind Startwerte für Geschwindigkeiten notwendig. Im Idealfall ist dies ein korrektes turbulentes Strömungsfeld, welches auch den Randbedingungen genügt. Dies ist in der Regel nicht gegeben. Für diesen Testfall sind die Anfangswerte an die statistischen Mittelwerte der DNS angenähert und mit zufälligen Störungen überlagert. Da dies nicht einem korrekten turbulenten Strömungsfeld entspricht, entwickelt sich die Turbulenz aus diesen Anfangsbedingungen. Erst wenn die Turbulenz vollständig entwickelt ist, d. h. die Strömung statistisch stationär ist, kann mit der Auswertungsphase begonnen werden. Während der Auswertungsphase werden ausreichend unabhängige Stichproben genommen, um statistische Werte der Turbulenz zu erhalten.

### 5.1.2 Einfluss der Gitterauflösung

Um den Einfluss der Gitterauflösung darzustellen, wird die Kanalströmung mit drei verschiedenen Auflösungen simuliert. Die Gitter haben Auflösungen von  $48 \times 49 \times 48$ ,  $64 \times 65 \times 64$  bzw.  $96 \times 97 \times 96$  Gitterzellen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Die Gitter sind in Hauptströmungs- und Spannweitenrichtung äquidistant, während die Zellen in Wandnormalenrichtung zur Wand hin feiner werden. Abbildung 5.2 zeigt das Rechengebiet mit Gitter einer Kanalströmung.

Der wandnächste Gitterpunkt liegt beim feinsten Gitter bei  $y^+ = 0,8$  und bei den größeren Gittern bei  $y^+ = 1$  bzw. bei  $y^+ = 1,2$ . Der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  ist definiert als:

$$y^+ = \frac{y Re_\tau}{\delta}. \quad (5.4)$$

Die Zeitschrittweite ist so gewählt, dass  $CFL < 1$  eingehalten wird. Die CFL-Zahl beschreibt das Verhältnis der Strecke, die ein Fluidteilchen während eines Zeitschritts zurücklegt, zu der Länge der durchströmten Zelle. Um Turbulenz zeitlich richtig

aufzulösen, sollte ein Fluidteilchen nicht eine ganze Zelle in einem Zeitschritt überspringen, also oben genannte Bedingung einhalten. Höhere Zeitschrittweiten kämen einer zeitlichen Filterung gleich.

Um den Einfluss der Gitterauflösung zu beurteilen, werden die Simulationen ohne Feinstrukturmodell durchgeführt. Bei geringen Reynoldszahlen ist dies möglich. Bei Strömungen mit stärkerer Turbulenz entsteht mehr turbulente kinetische Energie. Diese Energie wird aufgrund der fehlenden, nicht aufgelösten, kleinen Skalen nicht ausreichend dissipiert. Die Energie steigt in Laufe der Berechnung an und führt zu numerischen Instabilitäten.

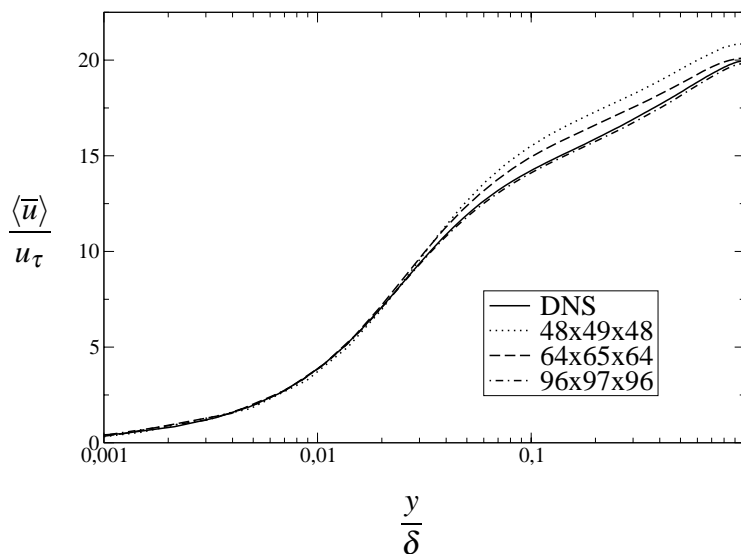


Abbildung 5.3: Einfluss der Gitterauflösung auf die mittlere Geschwindigkeit in x-Richtung auf eine LES ohne Feinstrukturmodell im ebenen Kanal

Abbildung 5.3 zeigt die gemittelte Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung im Kanal für die verschiedenen Gitterauflösungen. Die Geschwindigkeitsprofile nähern sich wie erwartet mit steigender Auflösung an die Daten der DNS an. Die feine Auflösung mit  $96 \times 97 \times 96$  Gitterzellen ist erstaunlich nahe an der DNS. Bei einer weiteren Verfeinerung des Gitters würde, wie Gullbrand und Chow (Gullbrand & Chow 2003) zeigen, das Geschwindigkeitsprofil weiter unter das der DNS sinken und sich dann bei weiterer Verfeinerung wieder der DNS annähern.

Für die gröberen Auflösungen liegt die mittlere Geschwindigkeit im wandfernen Bereich deutlich höher, als die der Simulation auf dem feinen Gitter. Hier wird ein noch ungelöstes Problem der LES deutlich. In einer LES müssen die energietragenden Strukturen durch das Gitter aufgelöst werden. Zur Wand hin werden diese Strukturen immer kleiner. Im Gegensatz zum RANS-Konzept reicht es bei einer LES nicht aus, nur in wandnormaler Richtung fein aufzulösen. Es ist in alle Raumrichtungen eine extrem feine Auflösung notwendig. Um die Wand aufzulösen, sind allein in der viskosen Unterschicht ( $y^+ < 5$ ) mehrere Gitterzellen notwendig. Bei der Verwendung von strukturierten Gittern führt diese feine Auflösung an der Wand auch zu einer hohen Auflösung in der Kanalmitte. Aus den hier herrschenden, höheren Geschwin-

digkeiten folgt eine deutlich geringere, mögliche Zeitschrittweite. Wird der wandnahe Bereich nicht fein genug aufgelöst, wird die Turbulenzproduktion zu klein vorhergesagt, da in diesem Bereich ein großer Teil der kinetischen turbulenten Energie produziert wird. Dies resultiert in zu geringen Reynoldsspannungen und zu geringer Wandreibung.

Bei sogenannten wandaufgelösten LES liegen bis zu einem Drittel der Gitterpunkte im wandnahen Bereich. Mit der Verwendung von Wandmodellen kann dieser numerische Aufwand vermieden werden. Allerdings gibt es noch kein Wandmodell, das zufriedenstellend mit Ablösungen umgehen kann. Auf diesem Gebiet ist noch erheblicher Forschungsbedarf vorhanden. Einen guten Überblick über Wandmodelle gibt Breuer (2001). Beim sogenannten hybriden Ansatz wird im wandnahen Bereich auf den RANS-Ansatz zurückgegriffen. Hier bereitet allerdings die Kopplung zwischen den LES- und RANS-Gebieten Probleme. Auch auf diesem Gebiet wird intensiv geforscht.

Dem Vorteil der besseren Wandauflösung bei der feinsten Gitterauflösung stehen zwei Nachteile gegenüber. Der Einfluss der Feinstrukturmodelle nimmt mit feiner werdenden Gittern ab und die Rechenzeiten erhöhen sich. Aus diesen Gründen wird der Testfall der ebenen Kanalströmung in dieser Arbeit mit einer Gitterauflösung von  $64 \times 65 \times 64$  Gitterzellen simuliert.

### 5.1.3 Einfluss des Germano-Modells

Zum Vergleich der getesteten Modelle werden Rechnungen mit dem traditionellen Germano-Modell durchgeführt. Als Funktion des Testfilters wird der Top-Hat-Filter verwendet. Die Filterweite wird nach Gleichung (3.7) ermittelt. Es wird ein Verhältnis von Testfilter- zu Gitterfilterweite  $\hat{\Delta}/\Delta = 2$  gewählt. Die Germano-Konstante wird in diesem Testfall über die homogenen Richtungen gemittelt. Eventuell auftretende negative Werte werden in dem Maße begrenzt, dass die effektive Viskosität nicht kleiner Null werden kann.

Abbildung 5.4 zeigt das gemittelte Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung ohne Feinstrukturmodell und unter Verwendung des Germano-Modells. Auf den ersten Blick führt die Verwendung des Germano-Modells nicht zu einer Verbesserung der Ergebnisse. Wie oben erwähnt, wird durch die nicht vollständige Wandauflösung eine zu niedrige Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  errechnet. Die Abweichung ist mit dem Germano-Modell nochmal deutlich größer. Dies kann auf die dissipative Wirkung des Feinstrukturmodells zurückgeführt werden. In Wandnähe werden dadurch Skalen unterdrückt, die an der Turbulenzproduktion beteiligt sind. Liegt die Wandschubspannungsgeschwindigkeit ohne Feinstrukturmodell nur 1,5% unter der der DNS, so ist der Wert mit dem Germano-Modell über 5 geringer. Allerdings gleicht der Verlauf des Geschwindigkeitsprofils mit Modell mehr dem der DNS-Daten.

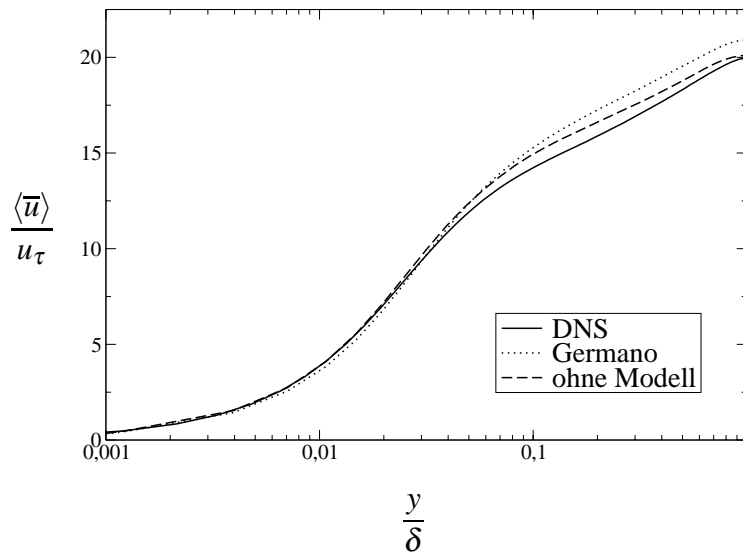


Abbildung 5.4: Einfluss des Germano-Modells auf die mittlere Geschwindigkeit in x-Richtung im ebenen Kanal

Sowohl die Gitterauflösung als auch das Feinstrukturmodell haben eine erhebliche Auswirkung auf die Wandschubspannung. Für diesen Testfall ist die Wandschubspannung eine wichtige Größe, da die Ergebnisse mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit normalisiert werden. Die Ergebnisse sind somit stark abhängig von der gewählten Gitterauflösung. Eine Bewertung der Feinstrukturmodelle fällt somit schwer. Aus diesem Grund liegt bei diesem Testfall das Hauptaugenmerk auf dem Verhalten der dynamischen Konstante.

#### 5.1.4 Ensemble Averaged Dynamic Procedure

Die Ensemble-Mittelung wurde bisher nur an einfachen, nicht wandgebundenen Strömungen, wie isotroper Turbulenz, getestet. Ab einer Anzahl von 16 Realisationen findet bei diesen Strömungen laut Carati et al. (2002) keine Änderung der Ergebnisse mit weiter steigender Anzahl an Realisationen statt. Wandgebundene Strömungen, wie die Kanalströmung, sind aufgrund der entstehenden Grenzschicht komplexer als die bisher mit der EADP simulierten Strömungsfälle. Es wird hier untersucht, ob die EADP für diese Strömungen ebenfalls mit einer geringen Anzahl von Realisationen durchführbar ist.

Wie bereits erwähnt sind für die Ensemble-Mittelung der dynamischen Konstante unkorrelierte Anfangsbedingungen notwendig, um statistisch unabhängige Simulation durchzuführen. Aus diesem Grund werden aus einer LES in bestimmten zeitlichen Abständen ein Geschwindigkeitsfeld entnommen, um Anfangsbedingungen zu erhalten. Der zeitliche Abstand zwischen diesen Feldern muss ausreichend groß

gewählt werden, damit diese nicht korrelieren. Als Maß für die Korrelation der Geschwindigkeitsfelder dient der Korrelationskoeffizient  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = \frac{\langle \psi_i''(\mathbf{x}, t) \psi_j''(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle}{\sqrt{\langle \psi_i''^2 \rangle} \sqrt{\langle \psi_j''^2 \rangle}}. \quad (5.5)$$

Er beschreibt die statistische Abhängigkeit einer Größe  $\psi_i$  zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  von einer anderen Größe  $\psi_j$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  am Ort  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ . Werden identische Parameter betrachtet, wird von einer Autokorrelation gesprochen.

Abbildung 5.5 zeigt die zeitliche Autokorrelation der Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  zwischen Geschwindigkeitsfeldern der Kanalströmung. Die dimensionslose Zeit  $t^*$  ist hier bezogen auf die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit  $U_b$  und die halbe Kanalhöhe  $\delta$ :

$$t^* = t \frac{U_b}{\delta}. \quad (5.6)$$

Die Korrelation fällt bereits nach kurzer Zeit stark ab, so dass die statistische Abhängigkeit nur noch gering ist. In dieser Arbeit wird zwischen den Anfangsbedingungen der einzelnen Simulationen ein dimensionsloser zeitlicher Abstand von  $\Delta t^* = 0,5$  gewählt. Auch wenn die Anfangsbedingungen noch leicht miteinander korrelieren, erhält man nach einigen gerechneten Zeitschritten vollkommen unkorrelierte Geschwindigkeitsfelder, da Turbulenz ein stochastischer Prozess ist.

Es werden Simulationen mit 1, 2, 4, 8 und 16 Realisationen durchgeführt. Die Simulation mit nur einer Realisation läuft numerisch nicht stabil. Aus diesem Grund wird die Konstante hier über homogene Richtungen gemittelt. Somit ist diese Simulation äquivalent zu einer Simulation mit einer Anzahl von parallelen Realisationen von  $R = 64^2$ . Diese Simulation wird im Folgenden und in den Abbildungen entsprechend bezeichnet. Schon die Simulation mit zwei Realisationen ist numerisch stabil. Aller-

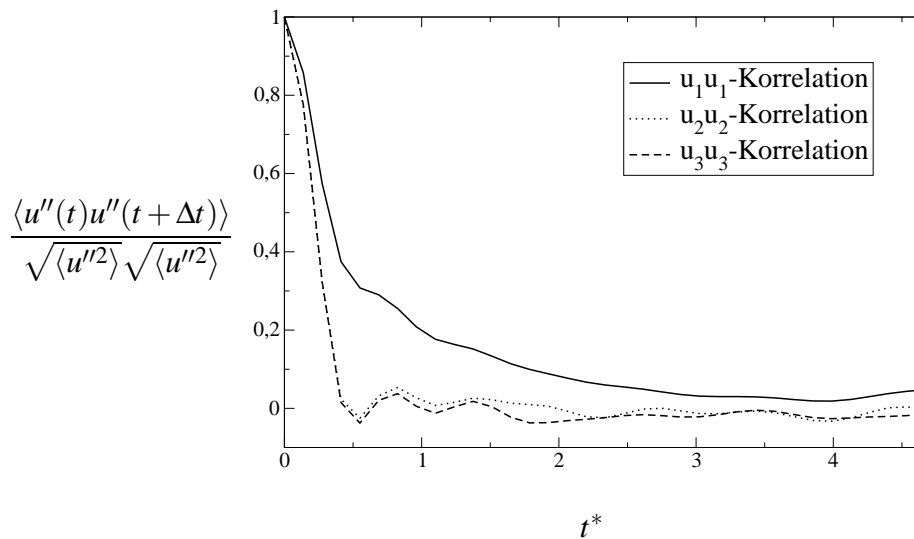


Abbildung 5.5: Autokorrelation der Geschwindigkeitsfelder im ebenen Kanal

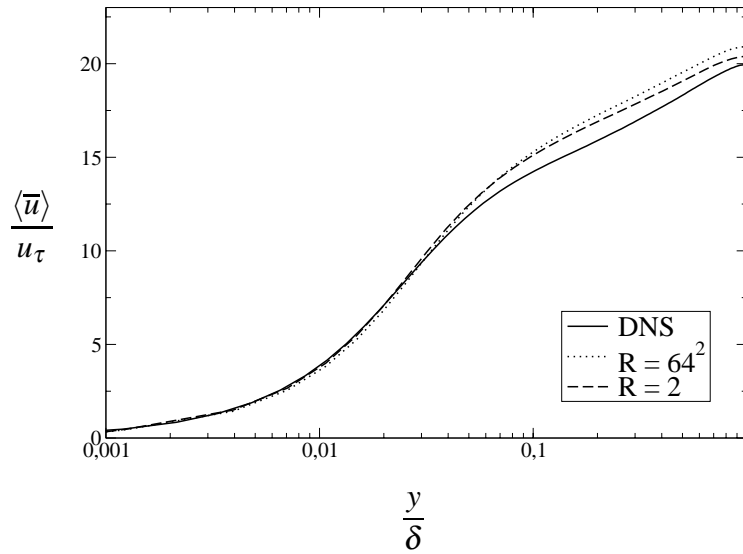


Abbildung 5.6: Gemittelte Geschwindigkeit in x-Richtung für unterschiedliche Anzahlen von Realisationen im ebenen Kanal

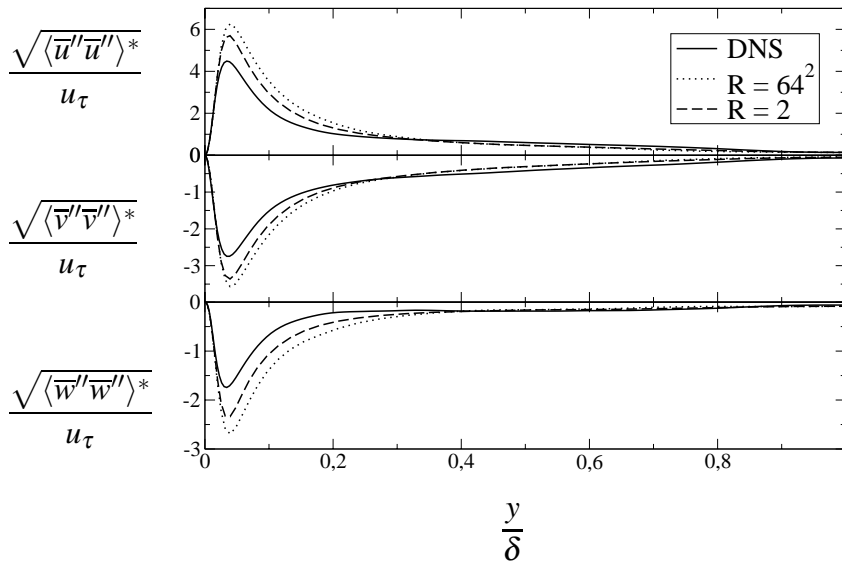


Abbildung 5.7: Gemittelte reduzierte Reynoldsspannungen für unterschiedliche Anzahlen von Realisationen im ebenen Kanal

dings wird bei allen Simulationen die dynamische Konstante nach der Mittelung in dem Maße begrenzt, dass keine negative effektive Viskosität entsteht.

Abbildung 5.6 zeigt das gemittelte Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf eine Darstellung der Simulationen mit  $R = 4, 8, 16$  verzichtet. Die Werte dieser Simulationen liegen alle zwischen den zwei dargestellten Kurven für  $R = 64^2$  und  $R = 2$ . Mit steigender Anzahl der Realisationen nähern sich die Kurven der Kurve der über homogene Richtungen gemittelten Simulation ( $R = 64^2$ ) an.



In Abbildung 5.7 sind die reduzierten Reynoldsspannungen der Simulationen dargestellt. Wie Winckelmans, Jeanmart & Carati (2002) diskutieren, können bei der Verwendung von spurlosen Modellen, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden, nur die reduzierten Reynoldsspannungen mit experimentellen oder DNS-Daten verglichen werden. Bei spurlosen Modellen wird die Spur des Feinstrukturspannungstensors mit dem Druck kombiniert und nur der spurfreie Teil des Tensors modelliert. Um nun Simulationsergebnisse und DNS-Daten korrekt miteinander vergleichen zu können, muss sowohl von den Reynoldsspannungen der LES-Daten als auch von denen der DNS-Daten die Spur abgezogen werden:

$$(u_i u_j)^* = u_i u_j - \frac{1}{3}(u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3). \quad (5.7)$$

Betrachtet man die reduzierten Reynoldsspannungen in Abbildung 5.7, so kommt es durch diese veränderte Berechnung der Konstante zu einer Annäherung der reduzierten Reynoldsspannungen an die DNS-Ergebnisse. Der Überschuss der Spannungen im Vergleich zu den DNS-Daten fällt nicht so groß aus wie bei der gemittelten Variante. Dies ist zum einen mit der höheren Wandschubspannungsgeschwindigkeit zu begründen, zum anderen könnte dies auf den Backscatter-Effekt zurückzuführen sein. Durch die Mittelung über eine geringe Anzahl von Realisationen gibt es einen Anteil von negativen Konstanten, die lokal auftreten. Bei einer Mittelung über homogene Richtungen können auch negative Konstanten auftreten. Diese erstrecken sich dann allerdings über die gesamte, homogene Ebene über die gemittelt wird. Die reduzierten Reynoldsspannungen der Simulationen mit  $R = 4, 8, 16$  liegen ebenso wie die Geschwindigkeitsprofile zwischen den zwei dargestellten Kurven für  $R = 64^2$  und  $R = 2$  und nähern sich mit steigender Anzahl der Realisationen der Kurve für  $R = 64^2$  an.

Abbildung 5.8 zeigt das statistische Mittel der dynamischen Konstante. Hier ist eine Abhängigkeit zwischen der mittleren Konstante und der Anzahl der Realisationen zu erkennen. Für nur eine Realisation sind die Konstanten schon während der Berechnung über homogene Richtungen gemittelt worden. Die Simulation mit zwei Realisationen zeigt die größten Abweichungen gegenüber der über homogene Richtungen gemittelten Simulation. Mit steigender Anzahl an Realisationen nähern sich die Kurven ebenfalls an die Kurve von  $R = 64^2$  an.

Die Anzahl der Realisationen hat folglich einen Einfluß auf die Strömung. Die Modellkonstante wird dynamisch aus den errechneten Geschwindigkeiten ermittelt. Hätte die Art der Mittelung keinen Einfluss auf die Strömung, würde sich der Mittelwert der Konstante nicht mit der Anzahl der Realisationen ändern. Die Begrenzung der dynamischen Konstante auf eine positive, effektive Viskosität ist nicht in diese Mittelung einbezogen.

Abbildung 5.9 zeigt, wie sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) der dynamischen Konstante in der Mittelebene des Kanals mit der Anzahl der Realisationen verändert. Die Werte der dynamischen Konstanten der Simulation mit nur einer Realisation sind vor der Mittelung über homogene Richtungen entnommen worden. Die

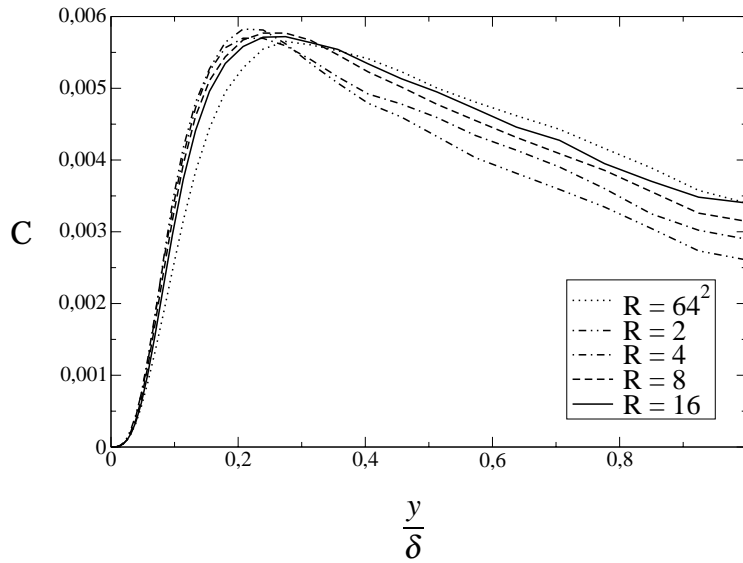


Abbildung 5.8: Gemittelte dynamische Konstante für unterschiedliche Anzahlen von Realisationen in Abhängigkeit vom Wandabstand

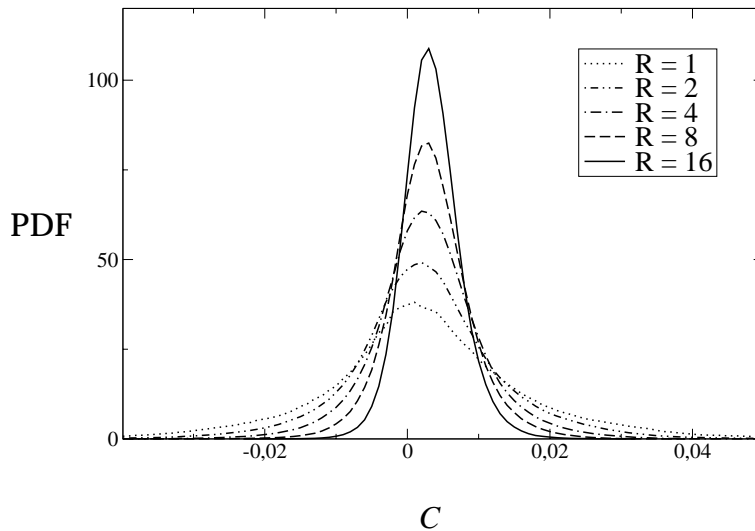


Abbildung 5.9: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der dynamischen Konstante in Kanalmitte für verschiedene Anzahlen von Realisationen

Streuung nimmt mit steigender Anzahl von Realisationen ab, so dass die Häufung um den Mittelwert zunimmt. Auch wenn bei mehreren Realisationen noch ein bedeutender Teil der Werte negativ ist, nimmt der Betrag dieser Werte erheblich ab. Die Anzahl der Werte kleiner -0,01, die für numerische Instabilitäten sorgen, sind bei 16 Realisationen schon marginal.

Deutlich wird die Abnahme der Schwankung auch in Abbildung 5.10. Hier ist die Standardabweichung  $\sigma$  in Abhängigkeit vom Wandabstand abgebildet. Sie ist definiert durch:

$$\sigma = \sqrt{\langle (\psi - \langle \psi \rangle)^2 \rangle}. \quad (5.8)$$

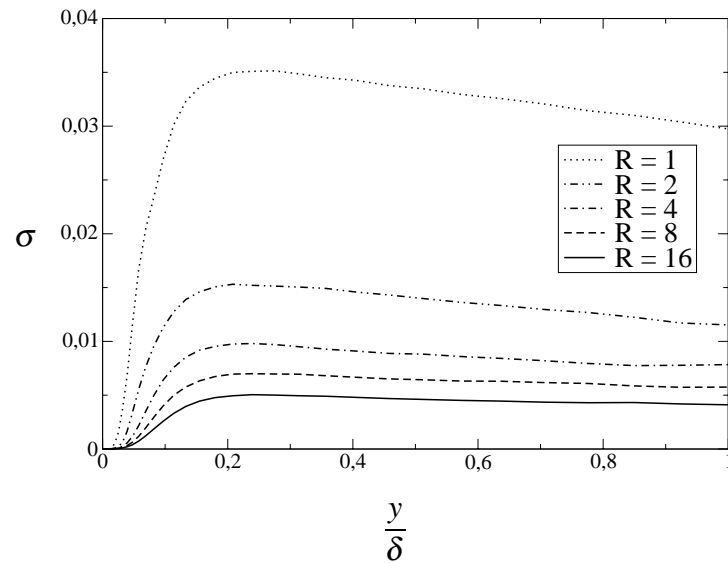


Abbildung 5.10: Standardabweichung der dynamischen Konstante für verschiedene Anzahlen von Realisationen in Abhängigkeit vom Wandabstand

Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie stark die Werte um den Mittelwert schwanken. Für die Simulation mit nur einer Realisation beträgt die Standardabweichung ein Vielfaches des Mittelwerts der dynamischen Konstante. Dies zeigt, dass die Schwankungen enorm sind.

Wie schon Carati et al. (2002) anhand der isotropen Turbulenz zeigen, reichen auch bei der ebenen Kanalströmung bereits 8 – 16 Realisationen aus, um mit dem gemittelten Germano-Modell vergleichbare Ergebnisse zu erlangen.

### 5.1.5 Energietransfer-Gleichgewichtsmodell

Als Basismodell für das EGM wird das Smagorinsky-Modell gewählt, um eine gute Vergleichbarkeit mit dem herkömmlichen dynamischen Smagorinsky-Modell zu gewährleisten. Auch die mittels EGM ermittelte Konstante unterliegt Schwankungen, weshalb hier ebenfalls eine Mittelung über homogene Richtungen durchgeführt wird. Der einzige Unterschied zwischen den Simulationen mit dem EGM und dem Germano-Modell liegt in der Bestimmung der dynamischen Konstanten. Während für das Germano-Modell die Germano-Identität als Grundlage dient, wird für das EGM ein Gleichgewicht im Energietransfer in einem Zwischenbereich des Energiespektrums angenommen. Das EGM ist detailliert in Kapitel 3.6.2 beschrieben.

In Abbildung 5.11 ist der Verlauf der errechneten Modellkonstanten dargestellt. Mit dem EGM wird ein deutlich flacheren Verlauf der Konstanten errechnet. Die dynamische Konstante des Germano-Modells steigt mit zunehmendem Wandabstand zunächst stark an und fällt dann zur Kanalmitte hin wieder ab. Die mit dem EGM ermittelte Konstante zeigt nahe der Wand ein ähnliches Verhalten, auch wenn sie nicht ganz so stark ansteigt. Allerdings bleibt sie dann zur Kanalmitte hin nahezu konstant.

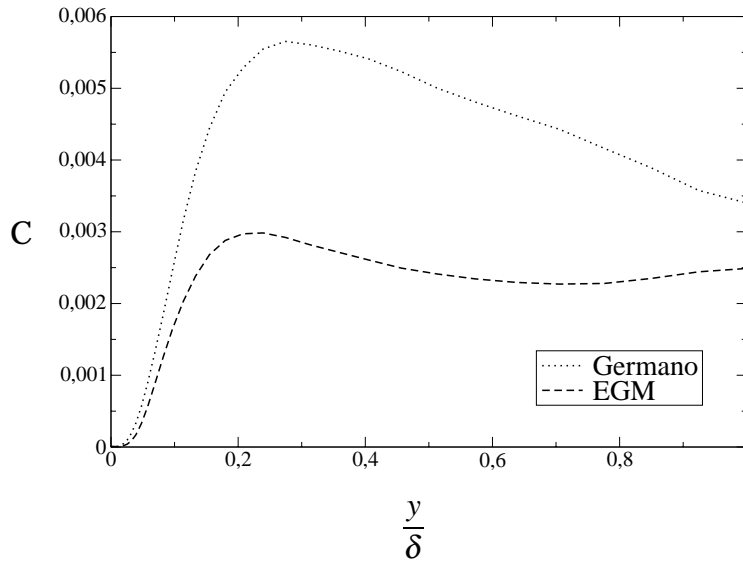


Abbildung 5.11: Gemittelte dynamische Konstante des EGM im Vergleich zum Germano-Modell im ebenen Kanal

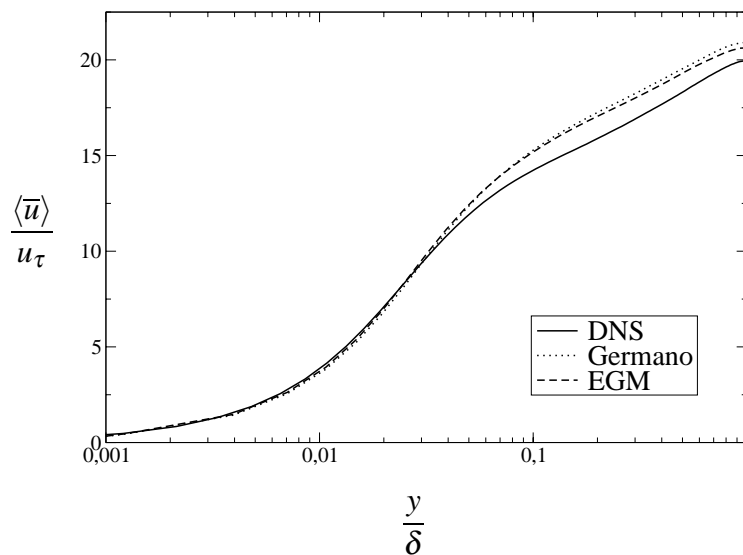


Abbildung 5.12: Gemittelte Geschwindigkeit in x-Richtung des EGM im Vergleich zum Germano-Modell im ebenen Kanal

Das Maß zur Bestimmung der Konstante ist der Energietransfer bzw. die Dissipationsrate. Das Germano-Modell ist bekanntermaßen zu dissipativ, somit ist eine geringere Konstante beim EGM diesbezüglich konsistent.

Abbildungen 5.12 und 5.13 zeigen das Geschwindigkeitsprofil und die turbulenten Statistiken. Wie bereits erwähnt liegt der einzige Unterschied der Simulationen in der Bestimmung der Konstanten. Durch die niedrigere Konstante, die das EGM errechnet, liegen die Ergebnisse für diese Prozedur zwischen den Ergebnissen des Germano-Modells und der Simulation ohne Feinstrukturmodell. Ein zur Kanalmitte hin flacheres Geschwindigkeitsprofil ist zu beobachten und die Wandschubspannungsge-

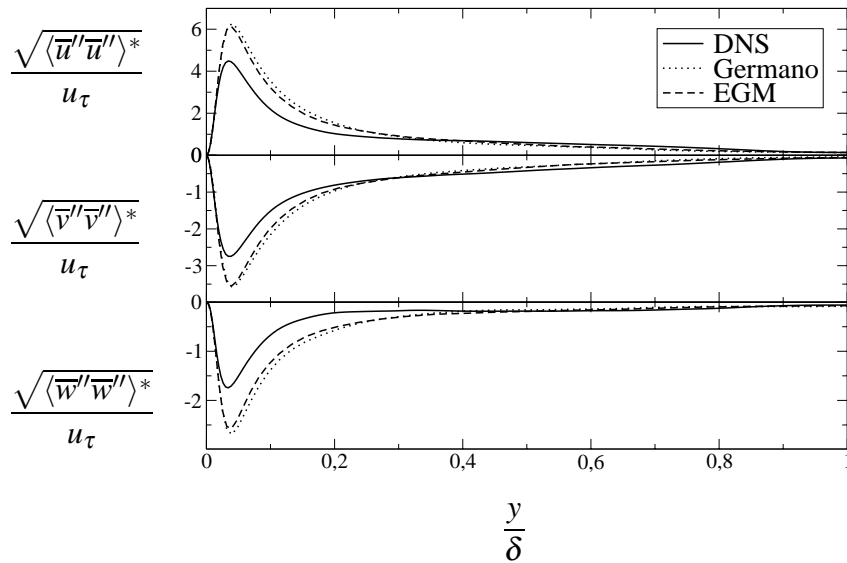


Abbildung 5.13: Gemittelte reduzierte Reynoldsspannungen des EGM im Vergleich zum Germano-Modell im ebenen Kanal

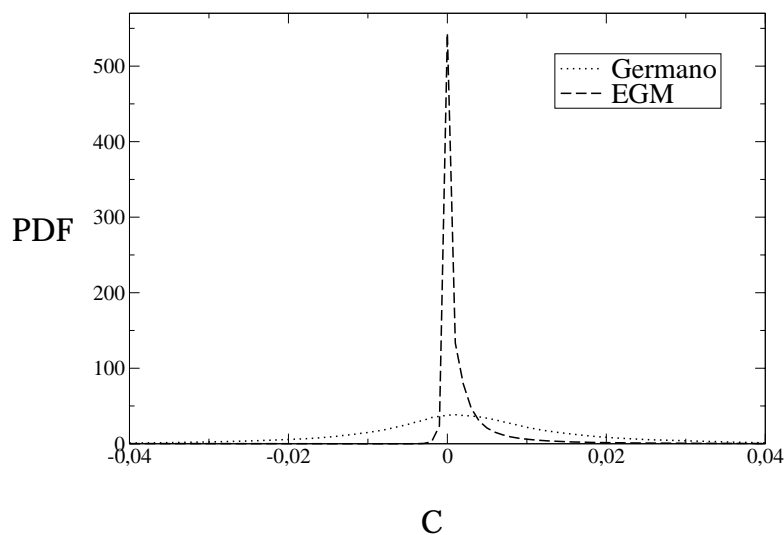


Abbildung 5.14: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der dynamischen Konstante in Kanalmitte für das Germano-Modell und das EGM

schwindigkeit der LES mit EGM liegt etwa 4% unter der der DNS. Mit dem Germano-Modell liegt die Wandschubspannungsgeschwindigkeit um mehr als 5% darunter.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Konstanten in Kanalmitte zeigt eine geringe Streuung und negative Werte treten selten auf. Dies lässt darauf schließen, dass eine Anwendung des EGM ohne Mittelung möglich wäre. Eine genauere Betrachtung der Statistiken für die dynamische Konstante zeigt jedoch ein anderes Bild. Die Minimal- bzw. Maximalwerte der dynamischen Konstante liegen im Bereich von  $\pm 10^7$ . Demgegenüber stehen beim Germano-Modell lediglich Werte bis zu  $2 \cdot 10^1$ . Diese Konstanten mit extrem hohen Betrag treten selten und so verteilt auf, dass sie in

der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nicht sichtbar sind. Das Entstehen dieser hohen Beträge ist darauf zurückzuführen, dass der Nenner in Gleichung (3.55) gegen Null geht, während der Zähler nicht gegen Null geht. Mit diesen Eigenschaften ist das Modell nicht in komplexen Geometrien, d.h. ohne Mittelung, anwendbar und wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

### 5.1.6 Nichtlineares dynamisches Modell nach Lund und Novikov

Das in Kapitel 3.6.3 beschriebene dynamische nichtlineare Modell wird an der ebenen Kanalströmung getestet. Im ersten Schritt werden die einzelnen Terme als Modelle betrachtet. Dies sind die fünf Einzelterm Modelle nach den Gleichungen (3.60) bis (3.64). Im zweiten Schritt werden zwei Terme aus Gleichung (3.59) miteinander kombiniert, folglich sind zehn Zweiterm-Modelle nach den Gleichungen (3.65) bis (3.74) zu untersuchen. Bis auf das Einzelterm-Modell, welches nur den ersten Term aus Gleichung (3.59) beinhaltet, sind die Modelle keine Wirbelviskositätsmodelle. Aus diesem Grund können sie nicht über die turbulente Viskosität in die Navier-Stokes-Gleichungen integriert werden. Die Implementierung erfolgt explizit über einen neuen Term für die Feinstrukturspannungen gemäß der gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen. Um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird auch der erste Term auf diese Weise implementiert. Durch die verschiedenen Implementierungen können sich Unterschiede in den Ergebnissen zwischen dem Germano-Modell und dem Einzelterm-Modell Term 1 ergeben. Bei allen Simulationen werden die Konstanten über homogene Raumrichtungen gemittelt. Ein Clipping wird nicht durchgeführt.

#### 5.1.6.1 Einzelterm-Modelle

Das Modell Term 1 und das Germano-Modell sind identisch. Es besteht folglich kein numerischer Mehraufwand. Der Mehraufwand zu den anderen Einzelterm-Modellen ist vernachlässigbar gering. Das Konvergenzverhalten ist bei allen Simulationen vergleichbar. Abbildung 5.15 zeigt die Verläufe der dynamisch bestimmten Konstanten im Mittel. Alle Konstanten sind an der Wand Null und steigen mit zunehmendem Wandabstand an bevor sie zur Kanalmitte hin wieder abfallen. Die Konstanten der Terme 1, 4 und 5 liegen im positiven Bereich, während die Konstante des zweiten Terms komplett im negativen Bereich liegt. Eine Ausnahme bildet die Konstante des dritten Terms. Sie wechselt mit zunehmendem Wandabstand aus dem Positiven in den negativen Bereich und steigt zur Kanalmitte wieder ins Positive.

Betrachtet man die Standardabweichung der dynamischen Konstanten in Abbildung 5.16, so fällt auf, dass die Konstante des dritten Terms mit Abstand die höchsten Schwankungen aufweist. Die Streuung ist so groß, dass der Umfang der Stichprobe nicht ausreicht, um eine glatte Kurve zu ermitteln. Die Standardabweichungen der Konstanten der Terme 1, 4 und 5 liegen etwa im gleichen Bereich, wobei letztere im wandnahen Bereich höhere Abweichungen als die Konstante des ersten und vierten Terms aufweist, jedoch ab  $y/\delta = 0,5$  wieder auf deren Niveau abfällt.

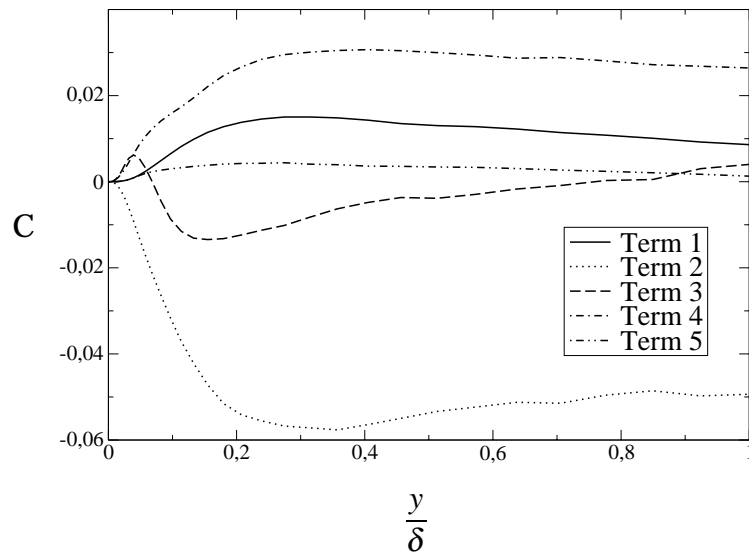


Abbildung 5.15: Gemittelte dynamische Konstante der Einzelterm-Modelle im ebenen Kanal in Abhängigkeit vom Wandabstand

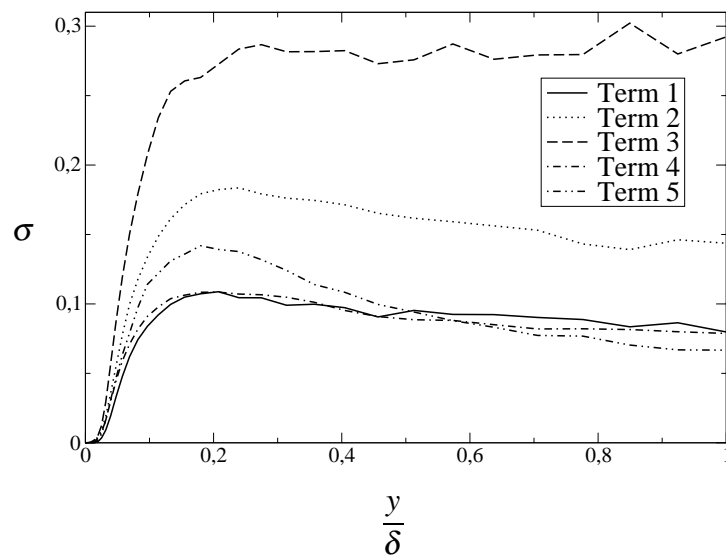


Abbildung 5.16: Standardabweichung der dynamischen Konstante der Einzelterm-Modelle im ebenen Kanal

Die mittleren Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung, die die Modelle liefern, sind in Abbildung 5.17 dargestellt. Die Modelle Term 3 und Term 4 führen zu den besten Übereinstimmungen bei der Wandschubspannungsgeschwindigkeit, wobei mit Term 4 der DNS-Wert sogar mit über 2% überschritten wird. Jedoch sind die Verläufe der Profile deutlich zu flach, was auch für das Modell mit dem fünften Term gilt. Die Modelle mit dem ersten und dem zweiten Term liefern hier zufriedenstellende Ergebnisse. Allerdings führen sie zu einer deutlich zu geringen Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Dieser Effekt ist auch sichtbar bei den reduzierten Reynoldsspannungen in Abbildung 5.18. Hier wird mit  $u_\tau^2$  normiert, was zu den größten Abwei-

chungen für diese Modelle führt. Einzig das Modell Term 4 zeigt aufgrund der guten Vorhersage der Wandschubspannung gute Ergebnisse. Die Reynoldsspannungen des Modells Term 5 sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht aufgeführt. Sie liegen im Bereich von Modell Term 3.

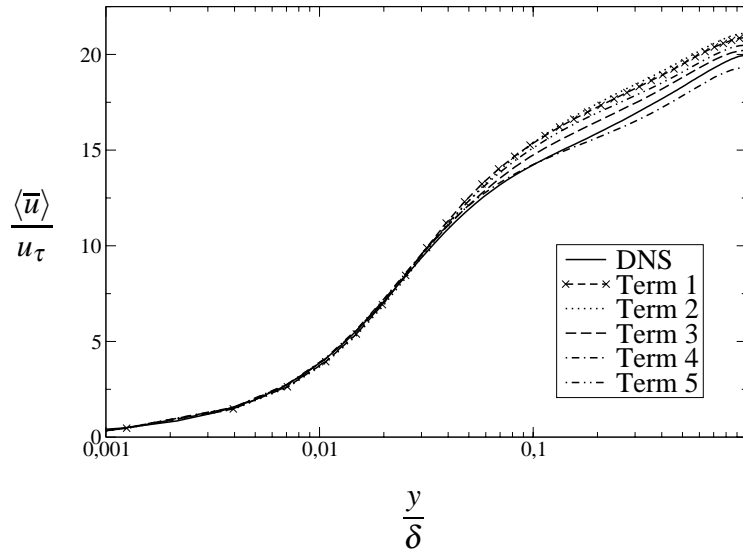


Abbildung 5.17: Gemittelte Geschwindigkeit der Einzelterm-Modelle in x-Richtung im ebenen Kanal

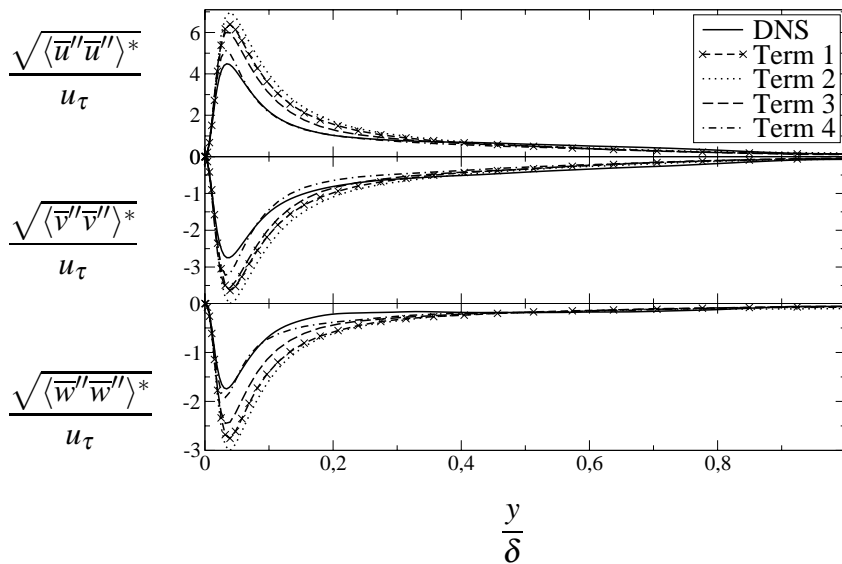


Abbildung 5.18: Gemittelte reduzierte Reynoldsspannungen der Einzelterm-Modelle im ebenen Kanal

Es bleibt festzustellen, dass keines der verwendeten Modelle eine deutliche Verbesserung gegenüber dem Smagorinsky-Modell erreicht. Eine Verbesserung der Wandschubspannungsgeschwindigkeit geht meist einher mit einer Verschlechterung des mittleren Geschwindigkeitsprofils. Dies ist konsistent mit den Beobachtungen der *a priori*-Untersuchungen von Lund & Novikov (1992). Hier erzielte ebenfalls das Ger-



mano-Modell die besten Ergebnisse. Aus diesem Grund werden die Einzelterm-Modelle bei den weiteren Testfällen nicht betrachtet.

### 5.1.6.2 Doppelterm-Modelle

Für eine Anwendung ohne Mittelung ist eine geringe Standardabweichung der dynamischen Konstante Grundvoraussetzung. Bei der Anwendung der EADP bedeutet eine geringe Standardabweichung weniger notwendige parallele Realisationen. Wie sich anhand der Einzelterm-Modelle erwiesen hat, weist die Konstante des Modells Term 3 eine extrem hohe Streuung auf. Zudem führt dieser Term im RANS-Kontext zu falschen Ergebnissen bei isotroper Turbulenz bezogen auf eine Festkörperrotation. Aus diesen Gründen werden im Folgenden die Doppelterm-Modelle, welche den dritten Term enthalten, nicht betrachtet. Es bleiben sechs Kombinationen aus Termen der Gleichung (3.59). Die *a priori*-Untersuchungen von Lund und Novikov zeigen, dass der erste Term aus dieser Gleichung der führende Term ist. Abbildungen 5.19 und 5.20 stellen die Geschwindigkeitsprofile und die reduzierten Reynoldsspannungen der Modelle dar, die diesen Term enthalten. Der numerische Mehraufwand im Vergleich zum Germano-Modell für die Doppelterm-Modelle liegt zwischen 11% und 13%. Der Mehraufwand entsteht zum größten Teil durch die Ermittlung der zwei, gekoppelten, dynamischen Konstanten nach Gleichung (3.80). Das Konvergenzverhalten der verschiedenen Modelle ist vergleichbar.

Das Modell Term 1+4 zeigt die beste Übereinstimmung mit dem mittleren Geschwindigkeitsprofil der DNS, auch wenn der Verlauf zur Kanalmitte hin etwas zu flach ist. Die ermittelte Wandschubspannungsgeschwindigkeit weicht von der DNS nur um etwa 0,5% ab. Deutlich größer fallen die Abweichungen bei den Modellen Term 1+2

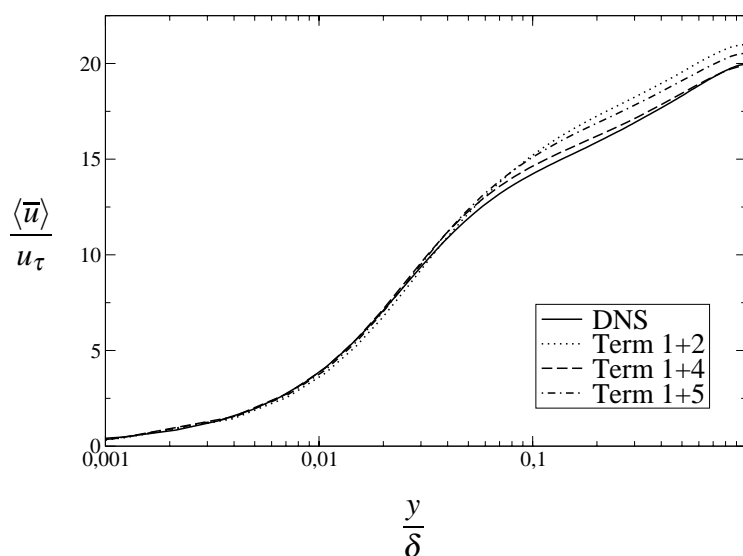


Abbildung 5.19: Gemittelte Geschwindigkeit der Doppelterm-Modelle mit Smagorinsky-Term in x-Richtung im ebenen Kanal

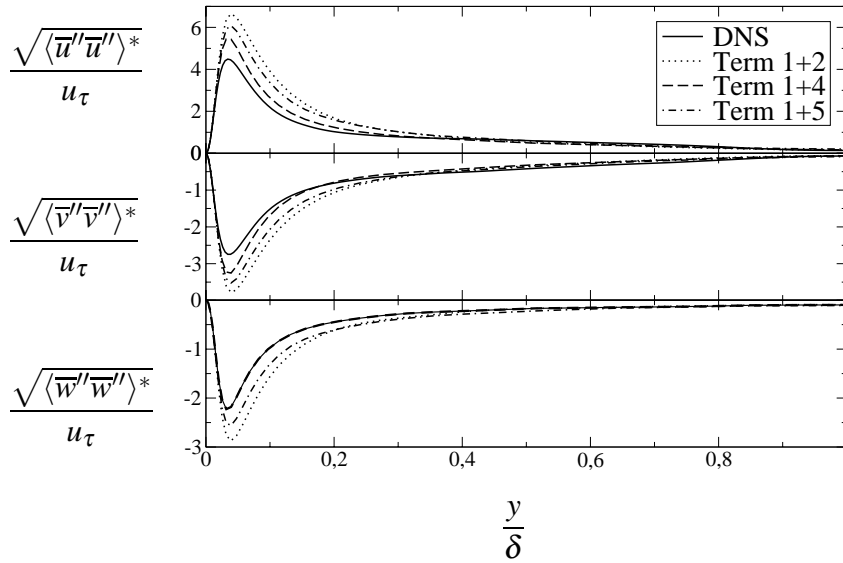


Abbildung 5.20: Gemittelte reduzierte Reynoldsspannungen der Doppelterm-Modelle mit Smagorinsky-Term im ebenen Kanal

und Term 1+5 aus. Den besten Verlauf zur Kanalmitte hin zeigt Modell Term 1+2, jedoch wird im wandnahen Bereich die Geschwindigkeit zu gering vorhergesagt. Trotz der guten Übereinstimmung der Wandschubspannungsgeschwindigkeit werden die reduzierten Reynoldsspannungen  $\langle u''u'' \rangle^*$  und  $\langle v''v'' \rangle^*$  von dem Modell Term 1+4 betragsmäßig zu hoch bestimmt. Erstaunlich ist, dass es für die Spannungen  $\langle w''w'' \rangle^*$  zu mit der DNS übereinstimmenden Ergebnissen kommt. Die Reynoldsspannungen der Modelle Term 1+2 und Term 1+5 weichen aufgrund der zu niedrigen Wandschubspannungen deutlich von den Spannungen der DNS ab.

Es fällt auf, dass Modelle, die den vierten Term enthalten, zu einer höheren Wandschubspannungsgeschwindigkeit führen. Dieser Effekt ist bei dem Einzelterm-Modell Term 4 sehr ausgeprägt. In den entsprechenden Zweiterm-Modellen tritt dieser Effekt abgeschwächt auf. Der mit diesem Term einhergehende zu flache Verlauf des Geschwindigkeitsprofils kann ebenfalls durch die entsprechende Wahl des zweiten Terms abgemindert oder verstärkt werden. Term 1 und Term 2 als Einzelterm-Modelle führen nicht zu einem zu flachen Verlauf und schwächen in Kombination mit Term 4 diesen unerwünschten Effekt ab. Diese Beobachtungen gehen aus Abbildung 5.21 hervor. Hier sind die Geschwindigkeitsprofile der verbleibenden Zweiterm-Modelle abgebildet. Während die Profile der Modelle Term 2+4 und Term 4+5 nah an dem Profil der DNS liegen, was auf eine gute Bestimmung von  $u_\tau$  hinweist, liegt das Profil von Modell Term 2+5 deutlich darüber.

Die Berechnung zweier gekoppelter dynamischer Konstanten, wie sie bei den Doppelterm-Modellen durchgeführt wird, führt zu einer Senkung der Fluktuationen der Konstanten. Abbildung 5.22 zeigt die Standardabweichungen für die Konstanten des Smagorinsky Terms für das entsprechende Einzelterm-Modell und die Zweiterm-Modelle Term 1+2 und Term 1+4. Die Standardabweichungen von  $C_1$  der Zweiterm-Modelle liegen deutlich unter der des Einzelterm-Modells. Dieser Effekt ist bei al-

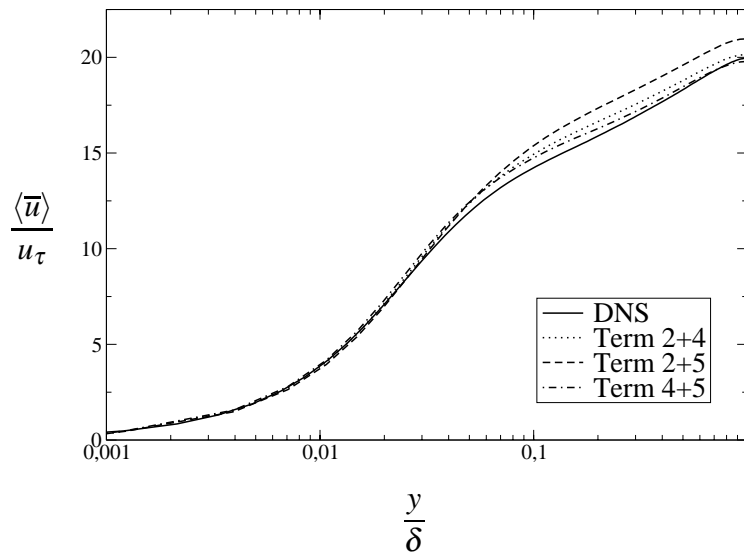


Abbildung 5.21: Gemittelte Geschwindigkeit der Doppelterm-Modelle ohne Smagorinsky-Term in x-Richtung im ebenen Kanal

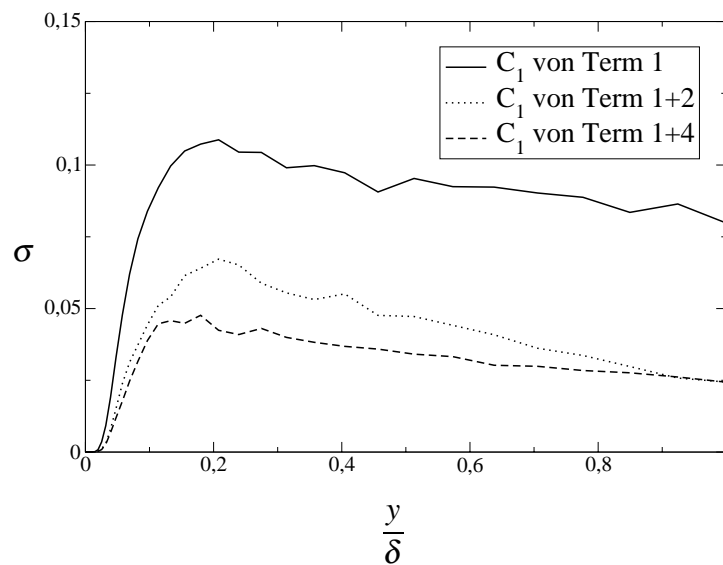


Abbildung 5.22: Standardabweichungen der Konstanten des Smagorinsky-Terms im ebenen Kanal

len Konstanten zu beobachten. Fraglich ist, ob die Reduzierung der Fluktuationen ausreicht um eine stabile Simulation ohne Mittelung durchzuführen. Die Konstanten der Einzelterm-Modelle Term 1 und Term 4 weisen im Vergleich zu den anderen Einzelterm-Modellen die geringste Streuung auf. Durch eine weitere Verringerung der Schwankungen durch die Kombination beider Terme wird möglicherweise eine Anwendbarkeit des Modells ohne Mittelung erreicht. Dies wird in den weiteren Testfällen untersucht. Neben dem Modell Term 1+4 werden ebenfalls die Modelle Term 1+2 und Term 2+4 betrachtet.

## 5.2 Überströmung einer zurückspringenden Stufe

### 5.2.1 Beschreibung des Testfalls

Die ebene Kanalströmung ist ein nützlicher Testfall für die Bewertung von Feinstrukturmodellen. Sie stellt in Bezug auf technische Strömungen jedoch ein zu stark vereinfachtes Strömungsproblem dar. Einen Schritt weiter geht die Testkonfiguration der zurückspringenden Stufe. Hierbei handelt es sich um eine plötzliche Aufweitung in einem ebenen Kanal. Abbildung 5.23 zeigt schematisch diesen Testfall. Der große Pfeil deutet die Hauptströmungsrichtung an. Die plötzliche Aufweitung des Kanals führt dazu, dass die Strömung ablöst. Hinter der Stufe bildet sich eine Rezirkulationszone aus. Die Wiederanlegelänge  $x_R$  gibt die Länge der Rezirkulationszone an. Hinter dieser Zone legt sich die Strömung wieder an, d. h. die Geschwindigkeiten nahe der Wand sind wieder positiv in Hauptströmungsrichtung.

Die Geometrie dieses Testfalls ist sehr einfach und kann mit kartesischen Gittern abgebildet werden. Es wird in  $z$ -Richtung eine unendliche Ausdehnung der Stufe angenommen. Es liegt folglich eine homogene Richtung vor.

Für diesen Testfall beträgt die Kanalhöhe bzw. der Abstand zwischen den Platten am Einstromrand  $2\delta$ . Er vergrößert sich durch die Aufweitung auf  $3\delta$ . Dies entspricht einem Expansionsverhältnis von 2:3. Die Stufenhöhe beträgt somit  $\delta$ .

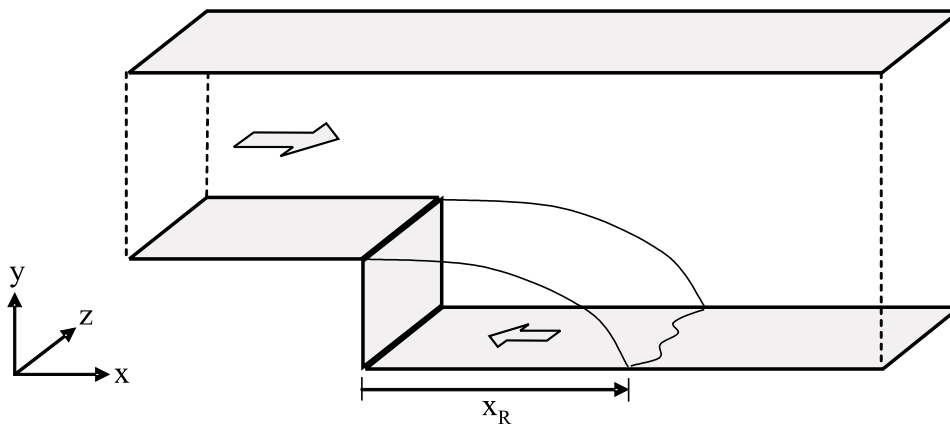


Abbildung 5.23: Skizze einer Überströmung einer zurückspringenden Stufe

Zum Vergleich der Ergebnisse werden die experimentellen Daten von Yoshioka *et al.* (2001a, 2001b) herangezogen. Die Reynoldszahl des Testfalls liegt bei  $Re_\tau = 180$  vor der Aufweitung. Dort liegt eine vollentwickelte turbulente Kanalströmung vor.

### 5.2.2 Beschreibung der experimentellen Daten

Yoshioka *et al.* (2001a, 2001b) haben an der zurückspringenden Stufe das Verhalten einer turbulenten Strömung auf periodische Störungen untersucht. Hierzu wurden

experimentelle Daten auch im ungestörten Zustand gesammelt, die hier zur Validierung der Simulationen herangezogen werden. Der Versuch wurde in einem Wasserkanal durchgeführt. Die Stufe befand sich  $50\delta$  hinter dem Kanaleintritt. Stolperdrähte an der oberen und unteren Wand direkt hinter dem Kanaleintritt sorgten für einen laminar-turbulenten Umschlag, um ein vollentwickelte turbulente Kanalströmung an der Stufe zu erreichen. Durch Messungen an der Stelle  $x/\delta = -0,6$  wurde dies validiert. Die Breite des Kanals betrug  $12\delta$ , wobei die Daten nur im mittleren Bereich von  $-3 < z/\delta < 3$  gesammelt wurden, um den Einfluss der Seitenwände vernachlässigbar klein zu halten.

Zur genauen Erfassung der Strömungsgeschwindigkeiten wurde ein zwei-dimensionales Particle-Image-Velocimeter (PIV) verwendet. In den Querschnitten  $x/\delta = 2, 4, 6, 8$  und  $10$  liegen die Werte für die mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung  $u$  und die Reynoldsspannungen  $u''u''$ ,  $v''v''$ ,  $-u''v''$  vor. Die Daten sind mit der gemittelten Mittengeschwindigkeit  $U_c$  im vor der Stufe liegenden ebenen Kanal normiert. Darüberhinaus wurde die Länge der Ablösezone hinter der Stufe gemessen.

Genaue Einzelheiten über den Versuchsaufbau und Messverfahren sind den Arbeiten von Yohsioka *et al.* (2001a, 2001b) zu entnehmen.

### 5.2.3 Rechengebiet und Gitterauflösung der Simulationen

Das Rechengebiet ist in x-Richtung vor der Aufweitung  $0,5\delta$  lang und dahinter  $30\delta$  lang. Vor der Stufe ist nur ein kurzer Einlauf notwendig, weil die Strömung stromaufwärts durch die Stufe nicht beeinflusst wird. Durch die Kanallänge hinter der Stufe von  $30\delta$  liegt der Ausstromrand weit genug von der Stufe entfernt, um den Einfluss der Ausstromrandbedingung auf das Rechengebiet zu minimieren.

Der Koordinatenursprung liegt am Fuß der Stufe. Der Kanal mit dem Plattenabstand  $2\delta$  verbreitert sich durch die Stufe plötzlich auf  $3\delta$ . Die Stufenhöhe entspricht  $\delta$ . Die Breite des Rechengebietes wird mit  $\frac{3}{4}\pi\delta$  gewählt. Für eine Kanalströmung bei der entsprechenden Reynoldszahl von  $Re_\tau = 180$  ist dies die notwendige Breite um periodische Randbedingungen einsetzen zu können (Kim et al. 1987). Es wird angenommen, dass dies für den Fall der zurückspringenden Stufe ebenfalls ausreichend ist.

Abbildung 5.24 zeigt das Rechengebiet und das verwendete Gitter der zurückspringenden Stufe im Bereich der Stufe. Das gesamte Rechengebiet endet wie oben beschrieben bei  $x/\delta = 30$ . Es wird ein kartesisches Gitter verwendet. In z-Richtung sind 48 Zellen über die Breite von  $\frac{4}{3}\pi\delta$  äquidistant verteilt. Um die Haftbedingung an den Wänden verwenden zu können, wird das Gitter zu jeder Wand hin, einem logarithmischen Gesetz folgend, verfeinert. Bei Wänden parallel zur Hauptströmungsrichtung liegt der wandnächste Gitterpunkt bei  $y/\delta = 4 * 10^{-3}$ . Bei der horizontalen Wand liegt der wandnächste Gitterpunkt erst bei  $x/\delta = 2 * 10^{-2}$ . Hier wurde der Gitterpunkt bewusst weiter entfernt von der Wand gelegt. Durch die Verwendung eines kartesischen Gitters zieht die Verfeinerung des Gitters an der Wand ebenfalls eine Ver-

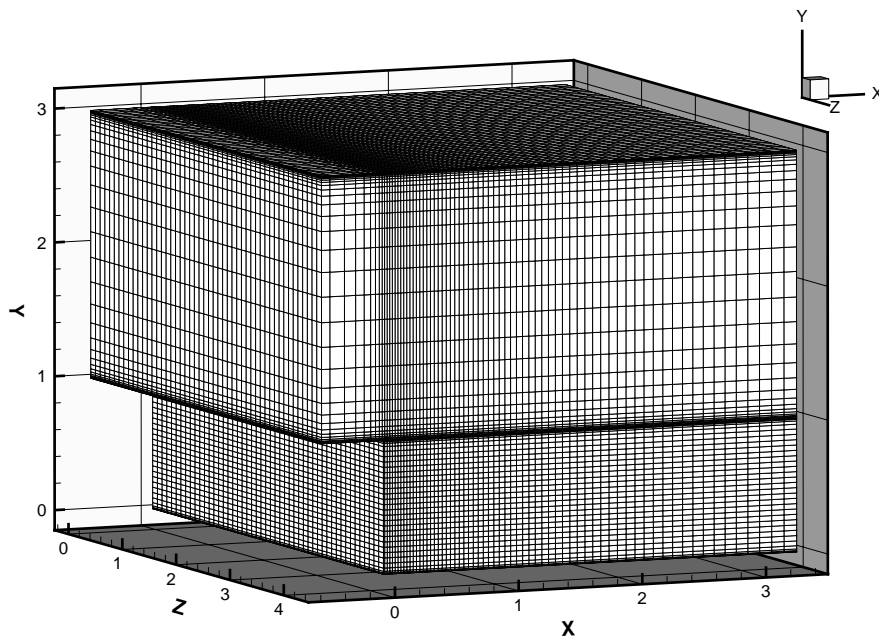


Abbildung 5.24: Ausschnitt des Rechengebiets und der Gitterauflösung der zurückspringenden Stufe

feinerung im Inneren des Strömungsgebiets nach sich. Gerade in diesem Bereich, in Verlängerung der horizontalen Wand, treten die größten Geschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung auf. Um die Zeitschrittweite nicht zu klein werden zu lassen, die durch das CFL-Kriterium limitiert ist, wurde hier auf eine höhere Auflösung der horizontalen Wand verzichtet.

Die Gitterverfeinerung an der unteren Wand vor der Stufe führt ebenfalls zu einer Verfeinerung im Inneren des Strömungsgebiets, wie in Abbildung 5.24 gut zu erkennen ist. Dies erhöht zwar die Anzahl der Gitterzellen und somit auch den numerischen Aufwand, aber da in diesem Bereich keine großen vertikalen Geschwindigkeiten auftreten, ist dieser Bereich nicht für die Begrenzung der Zeitschrittweite maßgebend.

In  $y$ -Richtung verteilen sich 64 Gitterzellen über eine Höhe von  $3\delta$ . In  $x$ -Richtung liegen 10 Gitterzellen vor der Stufe, die sich auch zur Stufe hin verfeinern, um das Expansionsverhältnis nebeneinanderliegender Zellen möglichst nahe Eins zu halten. Hinter der Stufe liegen 192 Zellen auf einer Länge von  $30\delta$ , wobei im Bereich  $x/\delta < 10$  die Hälfte der Gitterpunkte liegt, die sich zur vertikalen Wand hin verfeinern. Im Bereich  $10 < x/\delta < 30$  sind die restlichen Zellen äquidistant verteilt. Das gesamte Gitter hat somit knapp 600.000 Gitterzellen.

### 5.2.4 Rand- und Anfangsbedingungen der Simulationen

Aufgrund der unterschiedlichen Geometrie an Ein- und Ausströmrand, sowie der unterschiedlichen vorliegenden Strömungsverhältnisse, können bei diesem Testfall an diesen Rändern keine periodischen Randbedingungen eingesetzt werden.

Am Einstromrand besteht die Möglichkeit über bekannte statistische Größen ein turbulenzartiges Einstromen zu generieren. In diesem Fall liegt am Einstromrand eine vollentwickelte Kanalströmung vor. Aus diesem Grund ist es hier eine bessere Alternative eine einfach zu realisierende Kanalströmung vorzuschalten. Hierzu wird eine Kanalströmung simuliert und die Geschwindigkeiten in einem Querschnitt senkrecht zur Hauptströmungsrichtung an den Einstromrand der zurückspringenden Stufe weitergegeben. Das Gitter der Kanalströmung hat dabei in y- und z-Richtung die exakt gleiche Auflösung wie das Gitter am Einstromrand der zurückspringenden Stufe. Zudem stimmt die Zeitschrittweite der beiden Simulationen überein. Ist dies nicht der Fall, müssen die Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von Zeit und Ort interpoliert werden. Bei dieser Simulation wird eine Kanalströmung mit  $Re_\tau = 180$  vorgeschaltet. Die Gitterauflösung in y- und z-Richtung entsprechen der Auflösung am Einstromrand der zurückspringenden Stufe. Das Rechenggebiet der vorgeschalteten Kanalströmung hat die Ausmaße  $4\pi\delta \times 2\delta \times \frac{3}{4}\pi\delta$ . Die Anzahl der Gitterpunkte beträgt  $64 \times 32 \times 48$  in x-, y- und z-Richtung. Wie im ersten Testfall sind die Gitterweiten in x- und z-Richtung äquidistant, während in Wandnormalenrichtung das Gitter zur Wand feiner wird. Der wandnächste Gitterpunkt liegt bei  $y^+ = 0,8$ .

Am Ausströmrand besteht die Möglichkeit eine Nullgradienten-Randbedingung oder eine konvektive Randbedingung vorzugeben. In diesem Fall wird eine konvektive Randbedingung verwendet:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_{conv} \frac{\partial u_i}{\partial \chi} \Big|_{out} = 0. \quad (5.9)$$

Hier ist  $U_{conv}$  die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit in Richtung des Ausstromrandes. Sie wird entsprechend dem Massenfluss am Einstromrand gewählt, damit die globale Massenerhaltung erfüllt ist. Der Gradient normal zum Ausströmrand  $\frac{\partial}{\partial \chi} \Big|_{out}$  muss einseitig approximiert werden. Bei dieser Randbedingung handelt es sich um eine linearisierte und vereinfachte 1-D Transportgleichung. Sie hat sich für LES und DNS bewährt (Breuer 2001). Mit dieser Randbedingung werden Reflektionen am Ausstromrand vermieden.

Aufgrund der Homogenität in z-Richtung werden an den seitlichen Rändern des Rechengebiets periodische Randbedingungen eingesetzt.

An den Wänden gilt die Haftbedingung. Durch die geringe Reynoldszahl ist es möglich, die Auflösung fein genug zu wählen, um die Wand als ausreichend aufgelöst zu betrachten.

Modell	$\frac{x_R}{\delta}$
Experiment	5,5
Germano	6,4
Term 1+2	6,5
Term 1+4	6,6
Term 2+4	6,3

Tabelle 5.1: Mittlere Wiederanlegelängen  $x_R$  der Ablösung hinter der zurückspringenden Stufe

### 5.2.5 Vergleich der Doppelterm-Modelle mit dem Germano-Modell

Für diesen Testfall werden die Doppelterm-Modelle, Term 1+2, Term 1+4 und Term 2+4 verwendet. Von diesen Modellen hält lediglich das Modell Term 1+2 alle Symmetrien der Navier-Stokes-Gleichungen ein. Die beiden anderen Modelle brechen die 2DMFI, werden aber aufgrund der vielversprechenden Ergebnisse in der Kanalströmung weiter betrachtet.

Obwohl bei diesem Testfall eine Mittelung über eine homogene Richtung möglich ist, zeigt sich eine deutliche Änderung im Konvergenzverhalten. Wurde bei der Kanalströmung noch über eine ganze Ebene mit  $64^2$  Gitterzellen gemittelt, ist bei diesem Testfall nur eine Mittelung über eine homogene Richtung möglich, was bei der vorliegenden Auflösung 48 Gitterzellen entspricht. Während die Simulation mit dem Germano-Modell mit der Mittelung über 48 Zellen sehr stabil läuft, benötigen die Doppelterm-Modelle deutlich mehr Iterationen pro Zeitschritt um das Konvergenzkriterium zu erreichen. Für das Modell Term 2+4 muss neben der Mittelung noch ein Clipping der Konstanten eingeführt werden, um numerische Stabilität zu gewährleisten. Obwohl nachweislich die Schwankungen der Konstanten beim Germano-Modell höher sind, weist es eine höhere Stabilität auf. Dies kann auf die unterschiedlichen Implementierungen zurückgeführt werden.

Die mittlere Wiederanlegelänge ist im Experiment mit 5,5 ermittelt worden. Die Simulationen geben dies nicht korrekt wieder. Die Simulation mit dem Germano-Modell zeigt bezogen auf den experimentellen Vergleichswert einen mit 16% deutlich zu großes Rezirkulationsgebiet. Die Wiederanlegelängen der verwendeten Zweiterm-Modelle liegen im ähnlichen Bereich. Von den Modellen Term 1+2 und Term 1+4 werden sie noch etwas länger vorhergesagt. Das Modell Term 2+4 ermittelt eine geringfügig kürzere Rezirkulationszone als das Germano-Modell, wie Tabelle 5.1 zeigt.

Die Abbildungen 5.25 und 5.26 zeigen die Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung in den im Experiment erfassten Querschnitten. Es fällt auf, dass die Profile aller Simulationen sehr ähnlich sind. Lediglich im Bereich der unteren Wand, weiter entfernt von der Stufe und auch im Bereich der oberen Wand gibt es leichte Unterschiede im Profil. Die Simulationen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im Bereich der Rezirkulationszone ( $y/\delta < 1$ ) kommt es



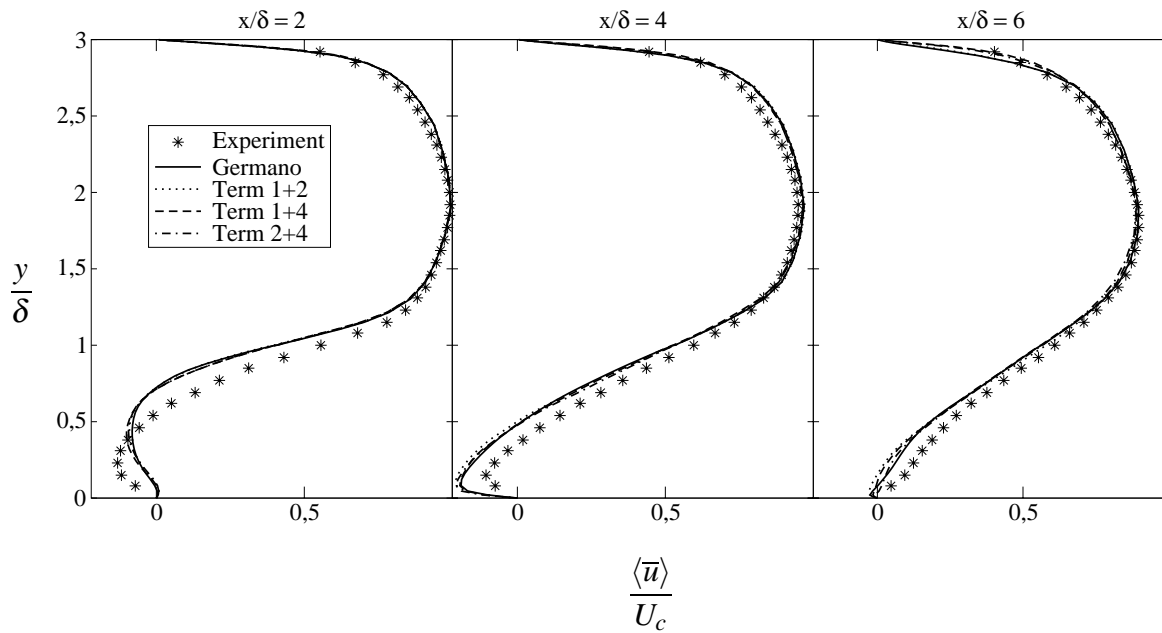


Abbildung 5.25: Gemittetes Strömungsprofil in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 2, 4, 6$  hinter der zurückspringenden Stufe

zu stärkeren Abweichungen. Mit größerer Distanz zur Stufe nähern sich die Profile der Simulationen den experimentellen Daten an. Dafür zeigen die Simulationen für die Querschnitte  $x/\delta = 8$  und  $x/\delta = 10$  eine zu geringe Spitzengeschwindigkeit im Profil. In diesen Querschnitten weichen die Profile der Simulationen mit Modell Term 1+4 und Term 2+4 von den Profilen der anderen Simulationen ab. Diese Simulationen zeigen im Bereich der oberen Wand eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten als die anderen Simulationen mit dem Modell 1+2 und dem Germano-Modell. Offensichtlich ist der Einfluss des vierten Terms für diese Veränderung verantwortlich. Allerdings erreicht das Germano Modell im Bereich der unteren Wand eine bessere Vorhersage der Geschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung.

Die Statistiken zweiter Ordnung sind wesentlich empfindlicher als die mittleren Geschwindigkeiten. Hier zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den Simulationen und auch zu den experimentellen Daten. Obwohl für diesen Testfall spurfreie Feinstrukturmodelle verwendet werden, können nicht die reduzierten Reynoldsspannungen nach Gleichung (5.7) verglichen werden, weil im Experiment die Reynoldsspannungen  $\langle w''w'' \rangle$  nicht erfasst wurden. Folglich werden die aufgelösten Reynoldsspannungen der Simulation mit den Reynoldsspannungen aus dem Experiment verglichen. Die gemittelten Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung  $\langle u''u'' \rangle$  sind in den Abbildungen 5.27 und 5.28 dargestellt. Das Germano-Modell gibt die Verläufe aus den im Experiment ermittelten Reynoldsspannungen gut wieder. Allerdings sind die Werte deutlich zu hoch. Die verwendeten Doppelterm-Modelle liefern ebenfalls zu hohe Werte. Diese liegen aber gerade bei den Spitzenwerten näher an den experimentellen Daten als die Werte des Germano-Modells. In dem Bereich, in dem das Ge-

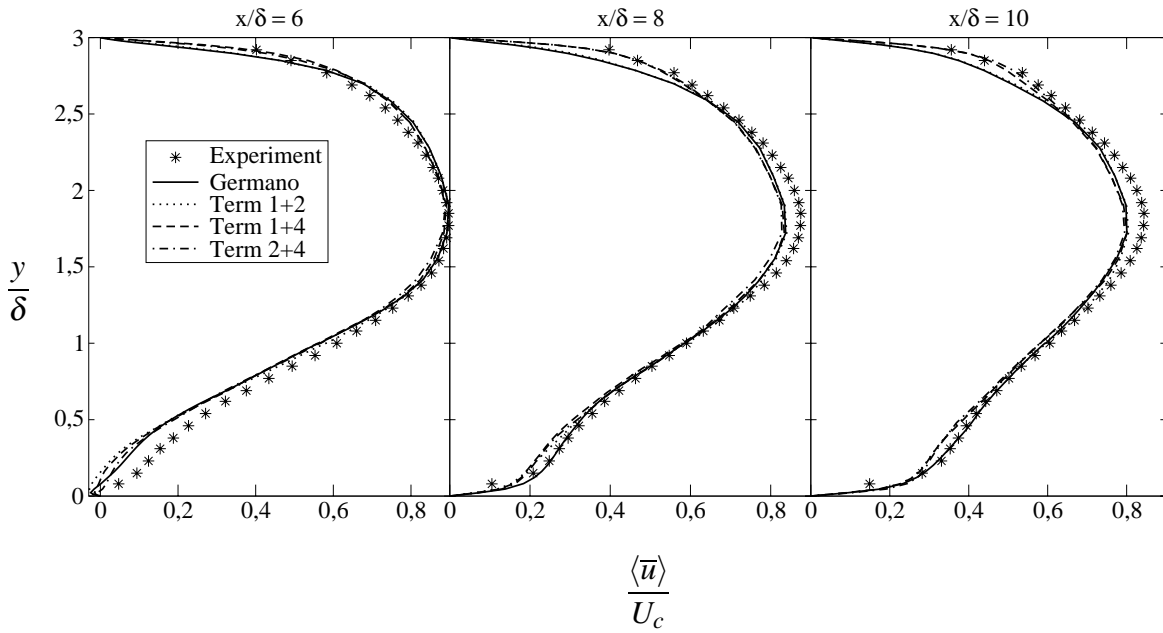


Abbildung 5.26: Gemittetes Strömungsprofil in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 6, 8, 10$  hinter der zurückspringenden Stufe

schwindigkeitsprofil nicht korrekt wiedergegeben wird, also in der Rezirkulationszone nahe der Stufe ( $x/\delta = 2$ ), sagt das Germano-Modell zu geringe Werte für  $\langle u''u'' \rangle$  voraus. Hier liegen die Ergebnisse der Doppelterm-Modelle ebenfalls näher an den experimentellen Werten. Insgesamt liefert das Modell Term 1+4 für die Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung leicht bessere Ergebnisse als die beiden anderen Doppelterm-Modelle und erheblich bessere Ergebnisse als das Germano-Modell.

Die Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung  $\langle v''v'' \rangle$  werden von allen Modellen gut wiedergegeben. Wie die Abbildungen 5.29 und 5.30 zeigen, liefert das Germano-Modell, wie schon bei den Reynoldsspannungen  $\langle u''u'' \rangle$  die größten Abweichungen. In den ersten zwei zu betrachtenden Querschnitten bei  $x/\delta = 2$  und  $x/\delta = 4$  ist der Spitzenwert deutlich zu gering. Die Doppelterm-Modelle zeigen hier eine genauere Vorhersage. In den folgenden Querschnitten weist das Germano-Modell deutlich zu hohe Spitzenwerte auf, während die Zweiterm-Modelle dies auch, aber nur gemäßigt, zeigen. Im Bereich der oberen Wand steigen die im Experiment gesammelten Werte zur Wand hin noch einmal an. Diese Charakteristik weisen die Ergebnisse des Germano-Modells nicht oder nur ansatzweise auf. Die Doppelterm-Modelle bilden dieses Verhalten ab, wobei die Modelle, die den vierten Term enthalten, hier die besten Vorhersagen liefern.

Ein ähnliches Bild liefern die Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$ , dargestellt in den Abbildungen 5.31 und 5.32. Das Germano-Modell weist im Querschnitt  $x/\delta = 2$  einen zu geringen Spitzenwert auf. In den Querschnitten  $x/\delta = 6, 8$  und  $10$  werden auch hier deutlich zu hohe Spitzenwerte vorhergesagt. Die Doppelterm-Modelle geben die im Experiment ermittelten Spitzenwerte besser wieder. Lediglich im Querschnitt  $x/\delta = 4$  sagt das Germano-Modell die experimentellen Spitzenwerte sehr gut vor-

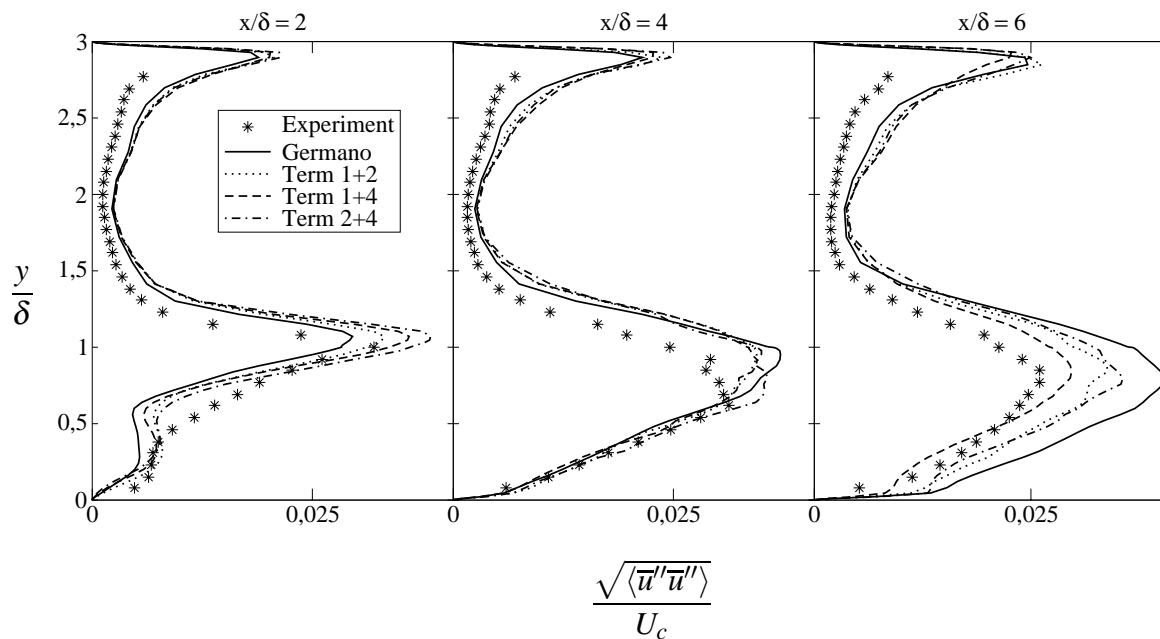


Abbildung 5.27: Gemittelte Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 2, 4, 6$  hinter der zurückspringenden Stufe

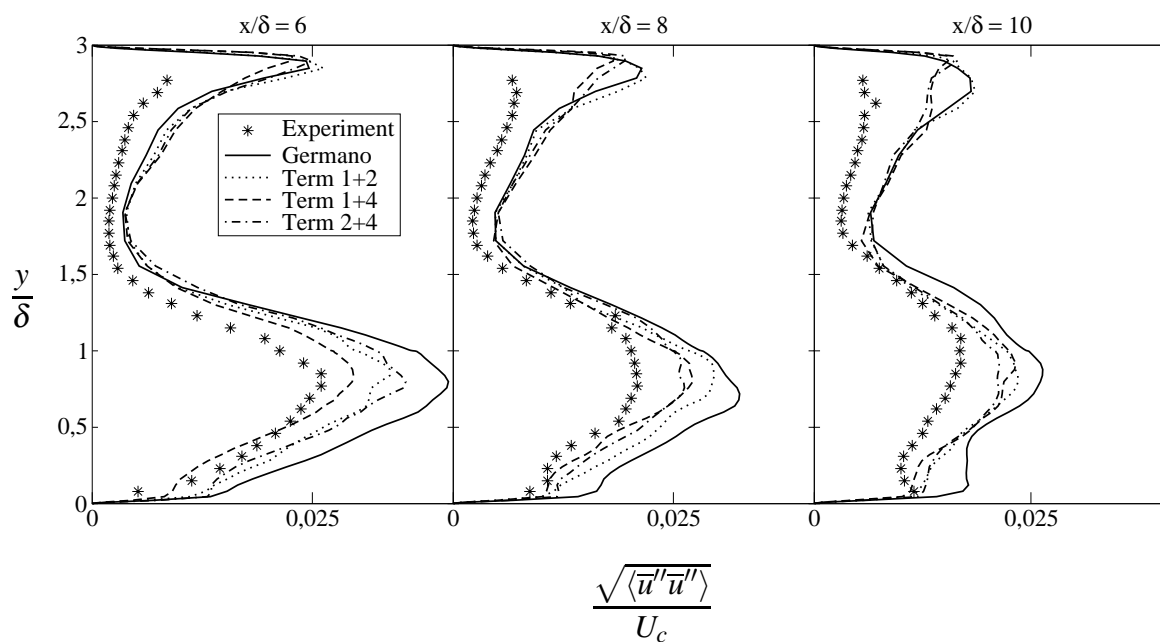


Abbildung 5.28: Gemittelte Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 6, 8, 10$  hinter der zurückspringenden Stufe

her. Die Doppelterm-Modelle liefern für diesen Querschnitt vergleichbare Reynoldsspannungen. In allen Querschnitten zeigen die Modelle Term 1+4 und Term 2+4 im Bereich der oberen Wand größere Abweichungen von den experimentellen Daten als

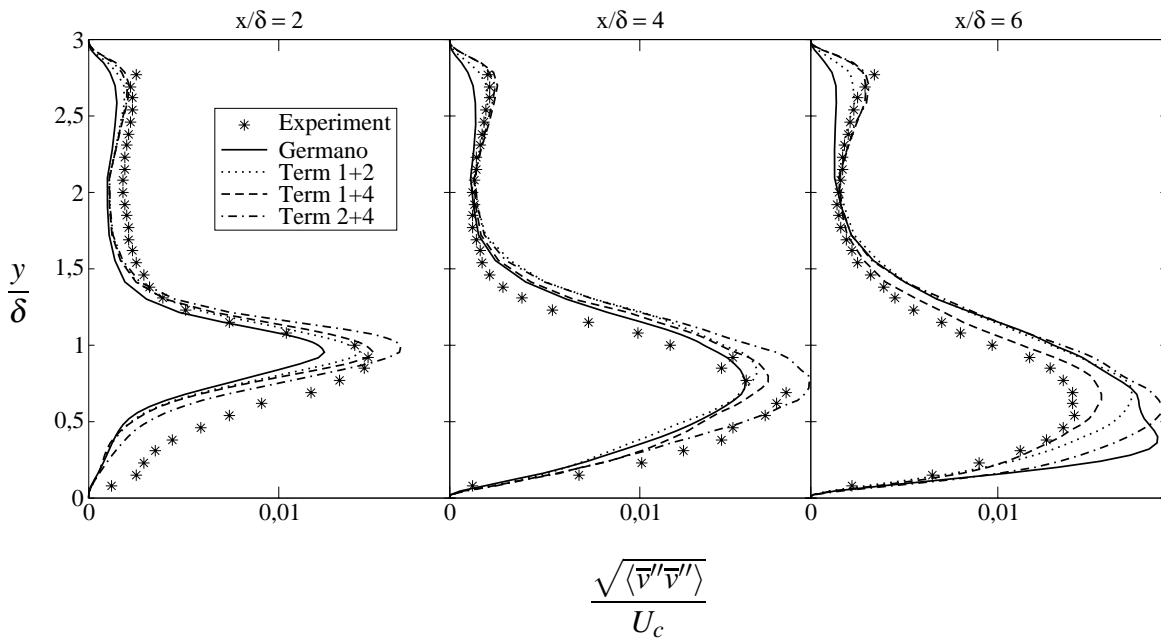


Abbildung 5.29: Gemittelte Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 2, 4, 6$  hinter der zurückspringenden Stufe

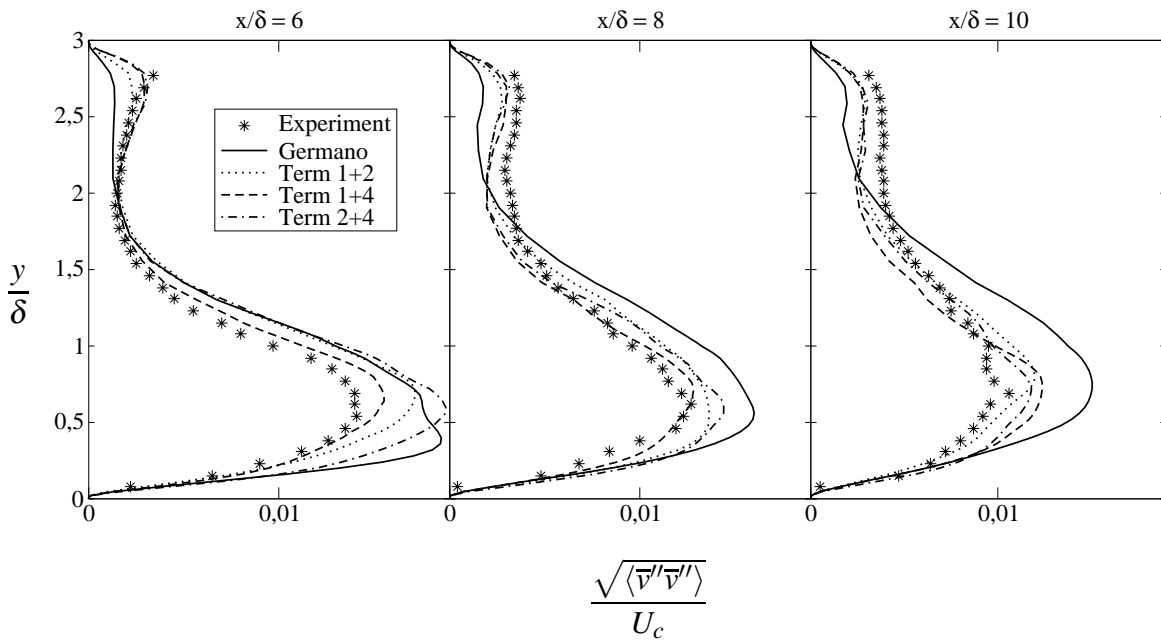


Abbildung 5.30: Gemittelte Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = 6, 8, 10$  hinter der zurückspringenden Stufe

das Germano-Modell und das Modell Term 1+2, die in diesem Bereich vergleichbare Ergebnisse liefern und die experimentellen Daten sehr gut wiedergeben.

Alle Simulationen geben die tatsächlich vorliegenden Strömungsverhältnisse aus dem Experiment gut wieder. Einzig die Wiederanlegelänge zeigt größere Abweichungen.

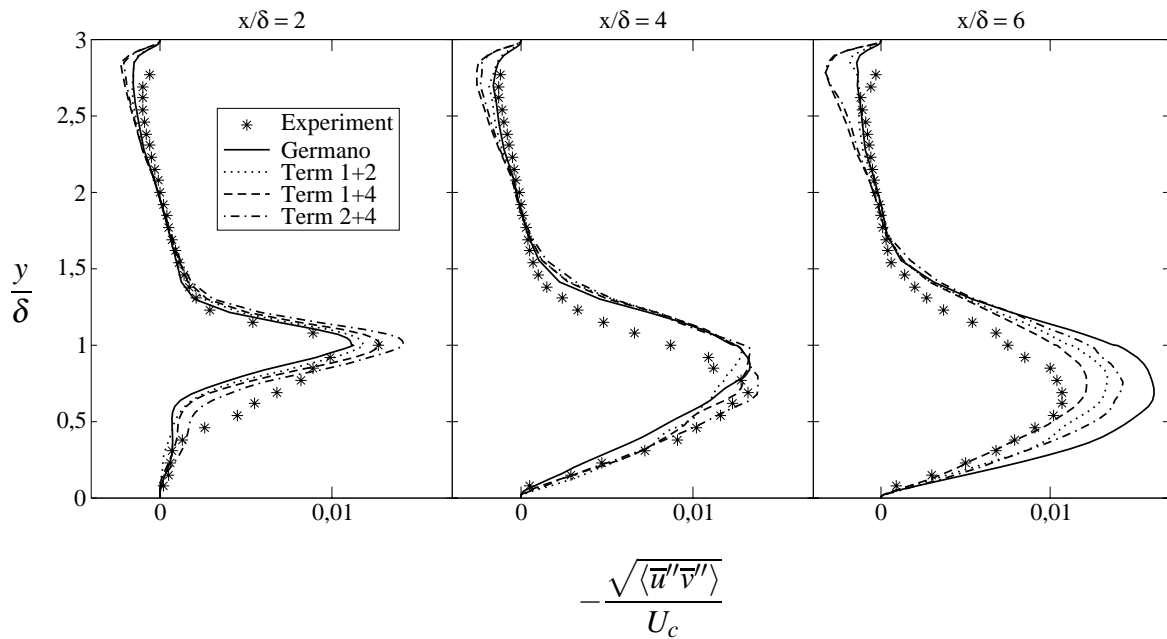


Abbildung 5.31: Gemittelte Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  für die Querschnitte  $x/\delta = 2, 4, 6$  hinter der zurückspringenden Stufe

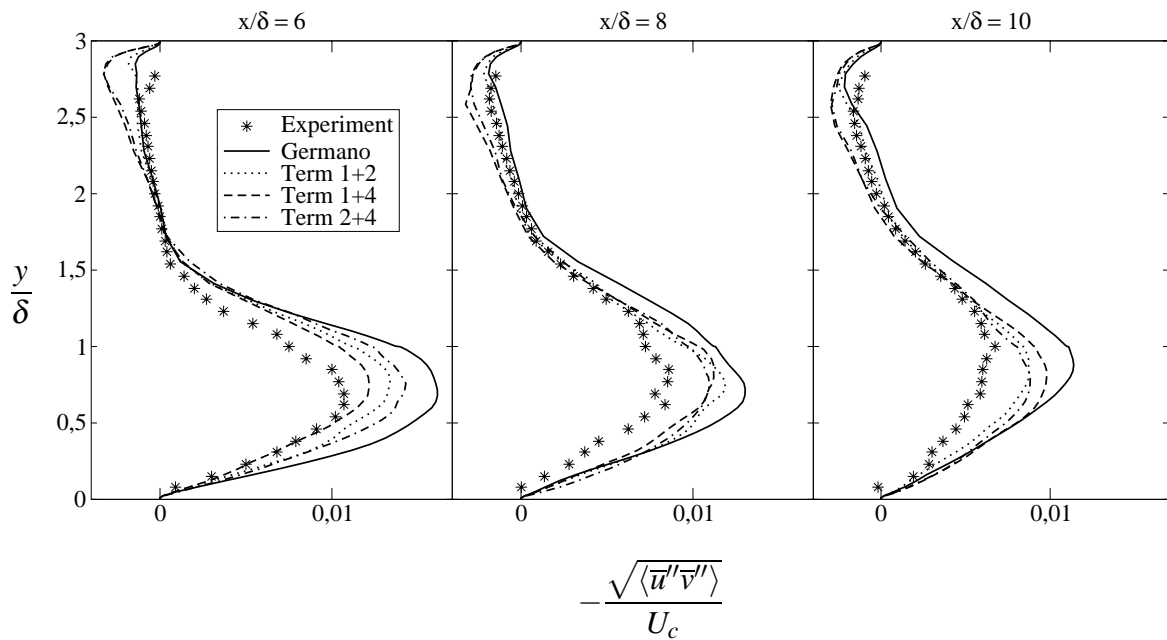


Abbildung 5.32: Gemittelte Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  für die Querschnitte  $x/\delta = 6, 8, 10$  hinter der zurückspringenden Stufe

Die Strömungsprofile zeigen trotzdem eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Anwendung der verschiedenen Feinstrukturmodelle wirkt sich kaum auf die Geschwindigkeitsprofile dieses Testfalls aus. Eine Auswirkung auf die Statistiken zweiter Ordnung ist deutlich erkennbar. Alle Zweiterm-Modelle zeigen eine Verbesserung der Vorhersage der Reynoldsspannungen. Auch das Modell Term

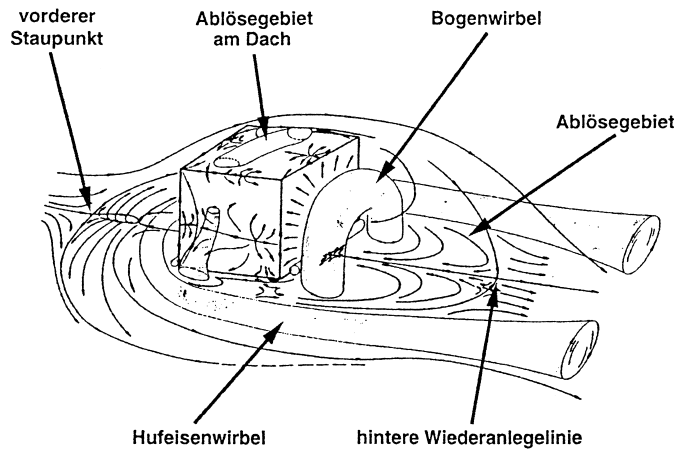


Abbildung 5.33: Skizze der Strömungsstrukturen einer Würfelumströmung aus Breuer (Breuer 2001)

2+4, welches den Smagorinsky-Term nicht enthält zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Allerdings zeigt die Simulation mit diesem Modell das schlechteste Konvergenzverhalten.

Bis auf die Abweichung für die Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  im Bereich der oberen Wand zeigt das Doppelterm-Modell Term 1+4 die beste Leistung für diesen Testfall.

## 5.3 Turbulente Umströmung eines Würfels in einem ebenen Kanal

### 5.3.1 Beschreibung des Testfalls

Ein weitaus komplizierterer Testfall als die Überströmung der zurückspringenden Stufe ist die Umströmung eines auf die Wand eines ebenen Kanals montierten Würfels. Diese Strömungskonfiguration kommt einer technischen Strömung sehr nahe. Sie besitzt keine homogenen Richtungen. Eine Simulation dieser Strömung mit den Standard RANS-Modellen führt nur zu unzureichenden Ergebnissen und ist daher gut geeignet um die Leistungsfähigkeit von Feinstrukturmodellen zu beurteilen. Zudem wurde sie von Martinuzzi (1992) ausführlich experimentell untersucht und dokumentiert.

Abbildung 5.33 stellt die wichtigsten Strömungsstrukturen einer Würfelumströmung dar. Das anströmende Fluid trifft auf den Würfel und wird davor gestaut. Ein Teil des Fluids strömt aufwärts über den Würfel. Der andere Teil strömt nach unten und bildet vor dem Würfel eine flache Rezirkulationszone. Hier entsteht der sogenannte Hufeisenwirbel, der links und rechts an dem Würfel vorbeiläuft. Auf dem Würfeldach löst die Strömung an der scharfen Kante ab. Hinter dem Würfel entsteht das größte Rückstromgebiet. In diesem bildet sich ein Bogenwirbel. Die Würfelumströmung ist stark instationär und die beschriebenen Strukturen sind nur im Mittel zu beobachten.

### 5.3.2 Beschreibung der experimentellen Daten

Eine experimentelle Untersuchung der Umströmung wandgebundener, rechteckiger, prismatischer Hindernisse wurde von Martinuzzi (1992) durchgeführt. Darunter wurde sehr ausführlich die Umströmung eines Würfels in einem ebenen Kanal betrachtet. Durchgeführt wurden die Versuche sowohl im Luft- als auch im Wasserkanal. Der Kanal hatte dabei eine Höhe von  $2\delta$ . Die Kantenlänge des Würfels entsprach der halben Kanalhöhe  $\delta$ . Die Breite des Kanals betrug  $24\delta$ . Somit war der Einfluss der Seitenwände auf die Strömung in der Nähe des Würfels vernachlässigbar. Der Würfel befand sich  $104\delta$  hinter dem Kanaleintritt. Wie auch schon im Experiment der zurückspringenden Stufe sorgten Stolperdrähte für einen frühen Umschlag in eine turbulente Strömung. Vor dem Hindernis lag eine vollentwickelte turbulente Kanalströmung vor, was durch eine Messung verifiziert wurde. Die vorliegende Reynoldszahl bezogen auf die Kantenlänge des Würfels und der mittleren Geschwindigkeit im Kanal  $U_b$  betrug  $Re_b = 40.000$ . Die Daten wurden mit einem Zwei-Komponenten Laser-Doppler-Anemometer gesammelt. In vielen Punkten um den Würfel wurden die Geschwindigkeitskomponenten in Hauptströmungs- und Wandnormalenrichtung ermittelt. Somit liegen die Statistiken vor, die aus diesen Komponenten gebildet werden können. Nähere Informationen zu Versuchsaufbau, Messtechnik und Messfehler sind der Arbeit von Martinuzzi (1992) zu entnehmen.

### 5.3.3 Rechengebiet und Gitterauflösung der Simulationen

Dieser Testfall kann theoretisch, wie Testfälle der ebenen Kanalströmung und der zurückspringenden Stufe, mit einem kartesischen Gitter diskretisiert werden. Dies hätte aufgrund der notwendigen Gitterverfeinerung an den Wänden zur Folge, dass das Gitter auch über dem Würfel sehr fein wird. Hier sind die höchsten Geschwindigkeiten zu erwarten und die mögliche Zeitschrittweite würde extrem klein ausfallen. Das verwendete Programm FASTEST ist in der Lage nichtkartesische Gitter zu verwenden. Für diesen Testfall wird diese Möglichkeit genutzt. Es wird ein sogenanntes "O-Grid" um den Würfel gelegt. Dieses "O-Grid" besteht aus insgesamt fünf Blöcken, also aus einem Block auf jeder Seite des Würfels. Abbildung 5.34 zeigt das Gitter um den Würfel, wobei die Blockgrenzen durch die fetten, grauen Linien gekennzeichnet sind. Außerhalb dieser Blöcke kann weiterhin ein kartesisches Gitter verwendet werden. Innerhalb des "O-Grids" sind die Gitterzellen verzerrt. Das Gitter kann durch die freie Wahl der Anzahl der Gitterzellen zur Wand hin fast beliebig verfeinert werden.

Dieses Gitter hat gegenüber einem kartesischen Gitter einen wesentlichen Vorteil. Das Gitter kann zum Würfel hin verfeinert werden ohne Verfeinerungen des Gitters im Inneren des Rechengebiets zur Folge zu haben, wie es bei der zurückspringenden Stufe der Fall war. Hierdurch sind deutlich größere Zeitschrittweiten möglich, zudem wird die Anzahl der Gitterzellen reduziert. Der Nachteil dieses "O-Grids" liegt in den verzerrten Gitterzellen innerhalb der Blöcke um den Würfel und dem dadurch erhöhten numerischen Fehler.

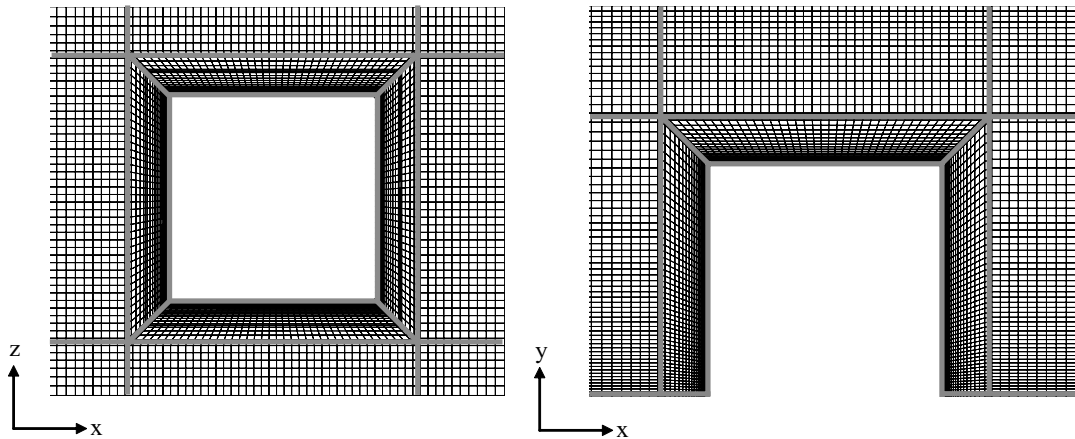


Abbildung 5.34: "O-Grid" um den Würfel

Die Abbildungen 5.35 und 5.36 zeigen das gesamte Integrationsgebiet in der  $y$ -Ebene bzw. in der  $z$ -Ebene. Der Abstand zwischen den ebenen Platten beträgt die doppelte Würfelhöhe  $2\delta$ . Das Gebiet beginnt in Strömungsrichtung  $3\delta$  vor dem Würfel und endet  $6\delta$  hinter dem Würfel. Die seitlichen Ränder liegen jeweils  $3\delta$  von dem Würfel entfernt. Somit hat das Integrationsgebiet die Ausmaße  $10\delta \times 2\delta \times 7\delta$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Das Gitter besteht aus 22 Blöcken und weist eine Verfeinerung zu jeder Wand hin auf. In den Abbildungen 5.35 und 5.36 sind die Blockgrenzen durch dicke Linien gekennzeichnet. Zwischen den ebenen Platten des Kanals liegen in  $y$ -Richtung 86 Gitterzellen. An den Platten liegt der erste Gitterpunkt in einem Abstand von  $y/\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ . In Hauptströmungsrichtung verteilen sich 148 Zellen und quer dazu sind es 98 Gitterzellen. Innerhalb des "O-Grids" verfeinern sich 20 Lagen von Gitterzellen zu den Wänden des Würfels hin. Hier liegt der erste Gitterpunkt  $1,25 \cdot 10^{-3}$  von den Wänden entfernt. Dies ergibt eine Gesamtanzahl von knapp 1,5 Mio. Gitterzellen.

### 5.3.4 Rand- und Anfangsbedingungen der Simulationen

Für diesen Testfall bietet es sich an, periodische Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung zu verwenden. Ein- und Ausströmrand haben die selbe Geometrie, wodurch der Einsatz dieser Randbedingung möglich wäre. Doch ein Vergleich der vorliegenden Strömungszustände aus dem Experiment in den beiden Querschnitten zeigt, dass hier erhebliche Unterschiede vorliegen. Ein Einsatz der periodischen Randbedingungen würde nicht den im Experiment vorliegenden Strömungsverhältnissen entsprechen. Aus diesem Grund wird der Simulation, wie bereits bei dem Testfall der zurückspringenden Stufe, eine ebene Kanalströmung vorgeschaltet. Als Feinstrukturmodell wird das Germano-Modell verwendet. Das Gitter der ebenen Kanalströmung hat dabei die selbe Auflösung in  $y$ - und  $z$ -Richtung wie der Einströmrand. Das Gitter der Kanalströmung ist nur in  $x$ -Richtung äquidistant. Daher wird die Germano-Konstante hier nur über diese Richtung gemittelt. Die Zeitschrittweite entspricht der verwendeten Zeitschrittweite der Simulation der Würfelumströmung. Die Geschwin-



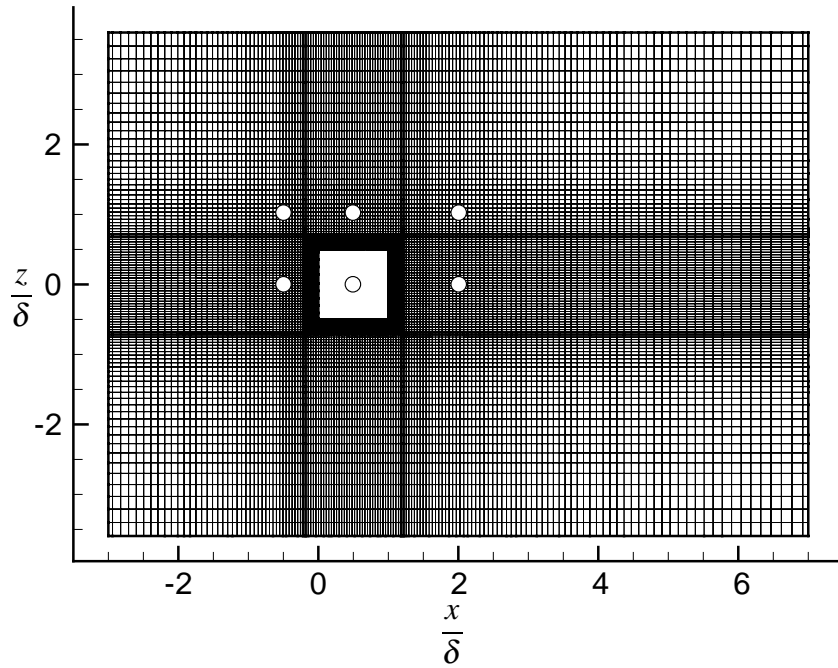


Abbildung 5.35: Gitter der Würfelumströmung in der Ebene  $y/\delta = 0,5$  mit den ausgewählten Messpunkten

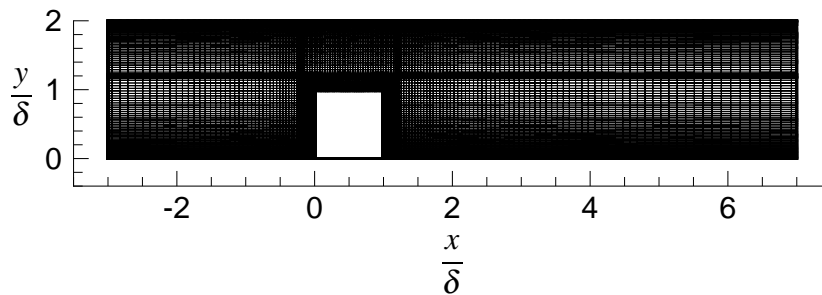


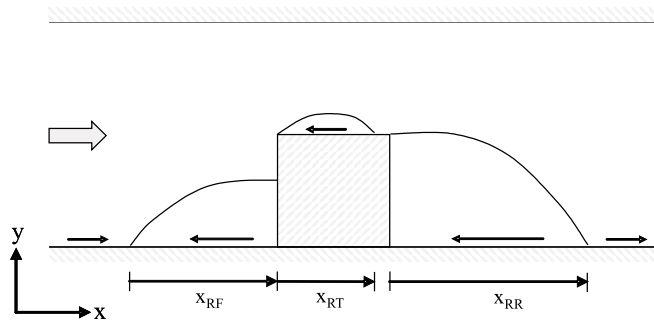
Abbildung 5.36: Gitter der Würfelumströmung in der Ebene  $z/\delta = 0$

digkeitswerte in einem Querschnitt der Kanalströmung werden an den Einstromrand der Würfelumströmung weitergegeben.

Das Gitter verfeinert sich an den Wänden des Kanals auf bis  $y/\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ . Dies entspricht in der Kanalströmung einem Abstand des ersten Gitterpunktes von  $y^+ \approx 6$ . Bei dieser Auflösung wird von einer grob aufgelösten LES gesprochen, weil die Wand aufgrund der hohen Reynoldszahl nicht fein genug aufgelöst werden kann. Auf die Verwendung einer Wandbedingung wird trotzdem verzichtet und es wird die Haftbedingung an den Wänden verwendet.

Am Ausströmrand wird die konvektive Randbedingung nach Gleichung (5.9) verwendet, wobei die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit  $U_{conv}$  entsprechend der mittleren Geschwindigkeit  $U_b$  am Einstromrand gewählt wird.

An den seitlichen Rändern bietet sich die Anwendung zwei verschiedener Randbedingung an. Zum einen besteht die Möglichkeit reibungsfreie Wände an diesen

Abbildung 5.37: Definition der Wiederanlegelängen  $x_{RF}$  und  $x_{RR}$ 

Rändern zu verwenden. Zum anderen können periodische Randbedingungen eingesetzt werden, denn in dem vorliegenden Abstand zum Würfel von  $3\delta$  zu jeder Seite liegen vergleichbare Strömungsverhältnisse vor. Hier werden periodische Randbedingungen verwendet.

### 5.3.5 Vergleich der Doppelterm-Modelle mit dem Germano-Modell

Der Testfall des umströmten Würfels besitzt in Gegensatz zu den vorangegangenen Testfällen keine homogenen Richtungen. Um zu starke Schwankungen der dynamischen Konstanten zu vermeiden, bleibt die Möglichkeit der Anwendung der EADP oder die Anwendung eines zeitlichen Tiefpassfilters. Für diesen Testfall wird eine zeitliche Tiefpassfilterung nach Gleichung (3.47) mit einem Filterparameter  $\varepsilon = 1 * 10^{-3}$  gewählt. Die Reduktion der Schwankungen durch die gekoppelte Berechnung der dynamischen Konstante bei den Doppelterm-Modellen reicht nicht aus, um die Rechnung stabil ohne diese zeitliche Filterung durchzuführen. Auch mit dieser Filterung zeigen sich Konvergenzprobleme, so dass für die ausgewählten Doppelterm-Modelle zusätzlich ein Clipping eingeführt wird. Trotzdem divergiert die Simulation mit dem Modell Term 2+4. Die Simulation des Germano-Modells läuft hingegen ohne Clipping stabil.

Zu einem ersten Vergleich der Simulationen mit Germano-Modell und den verbleibenden Doppelterm-Modellen Term 1+2 und Term 1+4 mit den experimentellen Daten werden die mittleren Wiederanlegelängen herangezogen. Abbildung 5.37 zeigt

Modell	$\frac{x_{RF}}{\delta}$	$\frac{x_{RR}}{\delta}$
Experiment	1,04	1,61
Germano	0,9	1,7
Term 1+2	0,85	2,3
Term 1+4	0,8	2,4

Tabelle 5.2: Mittlere Wiederanlegelängen  $x_{RF}$  und  $x_{RR}$  der Ablösungen vor und hinter dem umströmten Würfel

die verschiedenen Ablösezeiten vor, auf und hinter dem Würfel und die Definition der entsprechenden Wiederanlegelängen  $x_{RF}$ ,  $x_{RT}$  und  $x_{RR}$ . Im Experiment sowie in allen Simulationen kommt es nicht zu einem Wiederanlegen der Strömung auf dem Dach des Würfels. Aus diesem Grund zeigt Tabelle 5.2 nur den Vergleich der mittleren Wiederanlegelängen für die Rezirkulationszonen vor und hinter dem Würfel.

Die Wiederanlegelängen werden von der Simulation mit dem Germano-Modell zufriedenstellend vorhergesagt. Die vordere Ablöselänge wird um 13 % zu kurz bestimmt. Die Länge des vorderen, sehr flachen Rezirkulationsgebietes  $x_{RF}$  ist sowohl im Experiment als auch numerisch schwer aufzulösen. Eine größere Aussagekraft hat die Länge der Ablösung hinter dem Würfel, die experimentell und numerisch sehr gut zu erfassen ist. Hier wird mit dem Germano-Modell eine um weniger als 6 % zu lange Wiederanlegelänge vorhergesagt. Während die ermittelten Wiederanlegelängen für die vordere Rezirkulationszone der beiden Doppelterm-Modelle noch im Rahmen liegen, versagen sie völlig bei der Vorhersage der Wiederanlegelänge der Ablösung hinter dem Würfel. Die Ablösung wird um über 40 % zu lang berechnet.

Zur Validierung der Simulation werden die experimentellen Daten in sechs Punkten mit den Simulationsergebnissen verglichen. Dabei handelt es sich um drei Punkte bei  $z/\delta = 0$ , der Symmetrieachse des Rechengebiets. Es liegt jeweils ein Punkt vor, auf und hinter dem Würfel bei  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$ . Weitere drei Punkte liegen neben dem Würfel bei  $z/\delta = \pm 1$ , auch jeweils vor, auf und hinter dem Würfel. Diese Punkte sind in Abbildung 5.35 gekennzeichnet.

Abbildungen 5.38 und 5.39 zeigen die mittleren Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung. Die in Abbildung 5.38 dargestellten Profile werden von allen

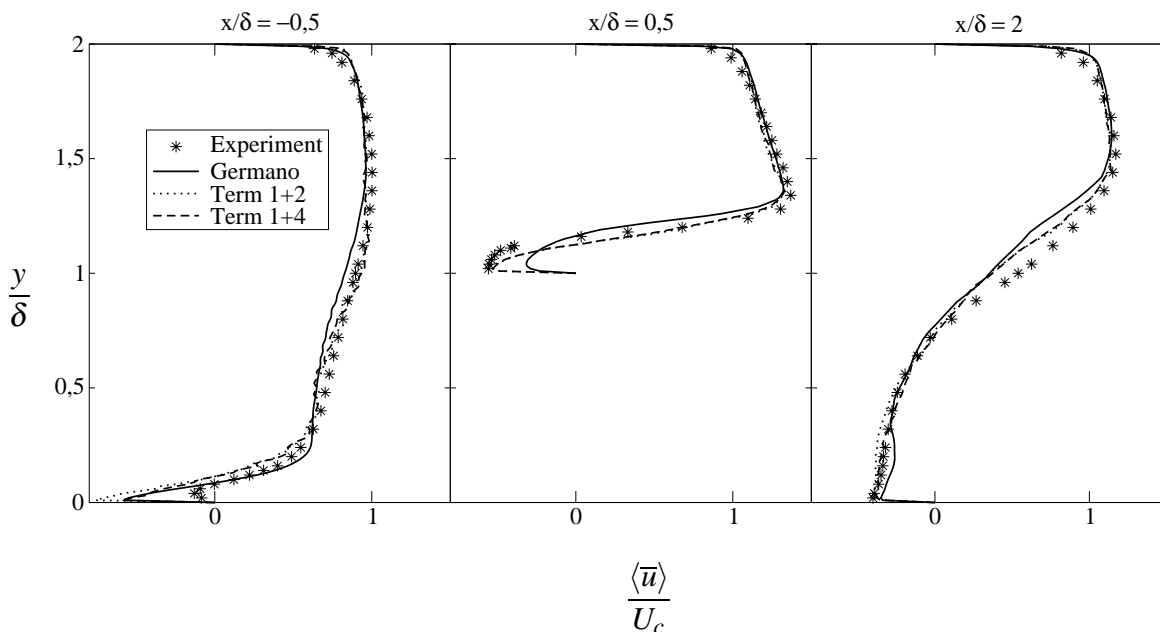


Abbildung 5.38: Gemitteltes Strömungsprofil in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 0$

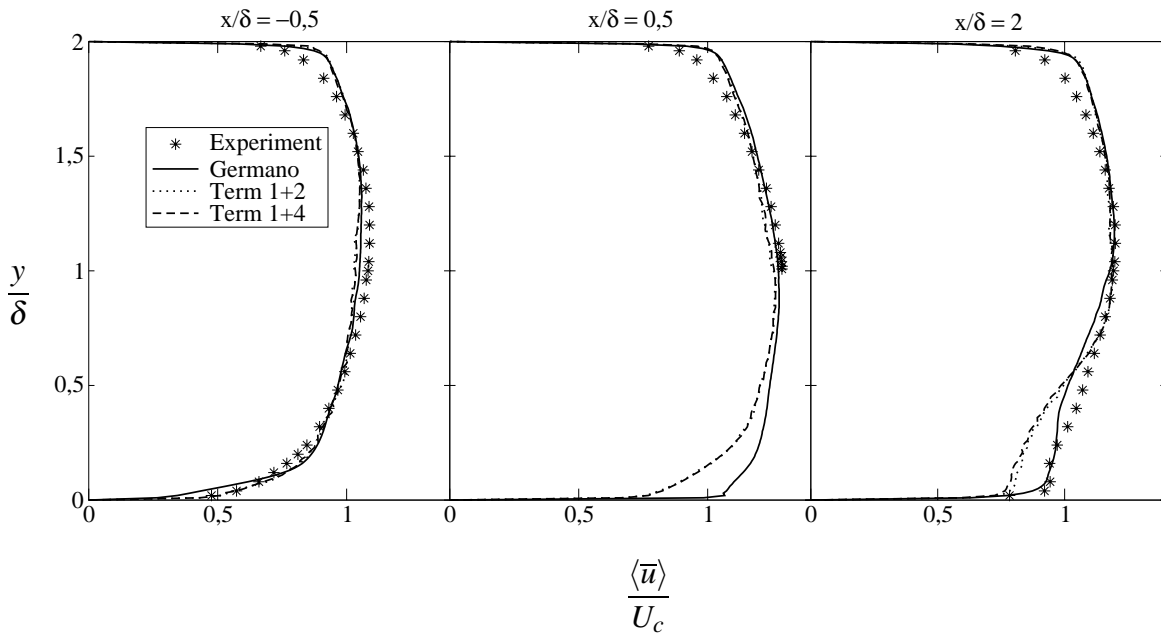


Abbildung 5.39: Gemittetes Strömungsprofil in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 1$

Simulationen gut wiedergegeben. Die Doppelterm-Modelle liefern sogar über dem Würfeldach bei  $x/\delta = 0,5$  eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment. Neben dem Würfel, dargestellt in Abbildung 5.39, zeigen die Profile eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im Querschnitt  $x/\delta = 0,5$  liegen aus messtechnischen Gründen nur für  $y/\delta > 1$  experimentelle Daten vor. Hier weichen die Profile der Simulationen mit Doppelterm-Modell deutlich von der Simulation mit dem Germano-Modell ab. Eine qualitative Beurteilung ist jedoch aufgrund fehlender Experimenteller Daten hier nicht möglich. Im Querschnitt dahinter bei  $x/\delta = 2$  weichen die Profile der Doppelterm-Modelle stark von den experimentellen Daten ab. Das Germano-Modell gibt hier eine bessere Vorhersage.

Ein Blick auf die Statistiken zweiter Ordnung zeigt den Grund für die vom Experiment stark abweichenden Ergebnisse der Doppelterm-Modelle. Abbildungen 5.40 zeigt die gemittelten Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung bei  $z/\delta = 0$ . Hier ist im ersten Querschnitt vor dem Würfel ein enormer Anstieg der Reynoldsspannungen zu verzeichnen. Diese deutlich zu hohen Spannungen sind ebenfalls in allen Querschnitten neben dem Würfel in Abbildung 5.41 zu beobachten. Dies lässt darauf schließen, dass im Bereich des Hufeisenwirbels, der sich um den Würfel legt, die Doppelterm-Modelle keine ausreichende dissipative Wirkung haben. Hierdurch kommt es zu einem Anstieg der Reynoldsspannungen.

Die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie findet in den kleinsten Wirbeln statt. Diese sind bei einer LES nicht durch das Gitter aufgelöst und ihr Einfluss muss durch das Feinstrukturmodell modelliert werden. Hat das Feinstrukturmodell eine zu geringe dissipative Wirkung, kommt es zu einer Akkumulation der turbulenten kinetischen Energie, was oft mit numerischen Stabilitätsproblemen einhergeht. Dieses

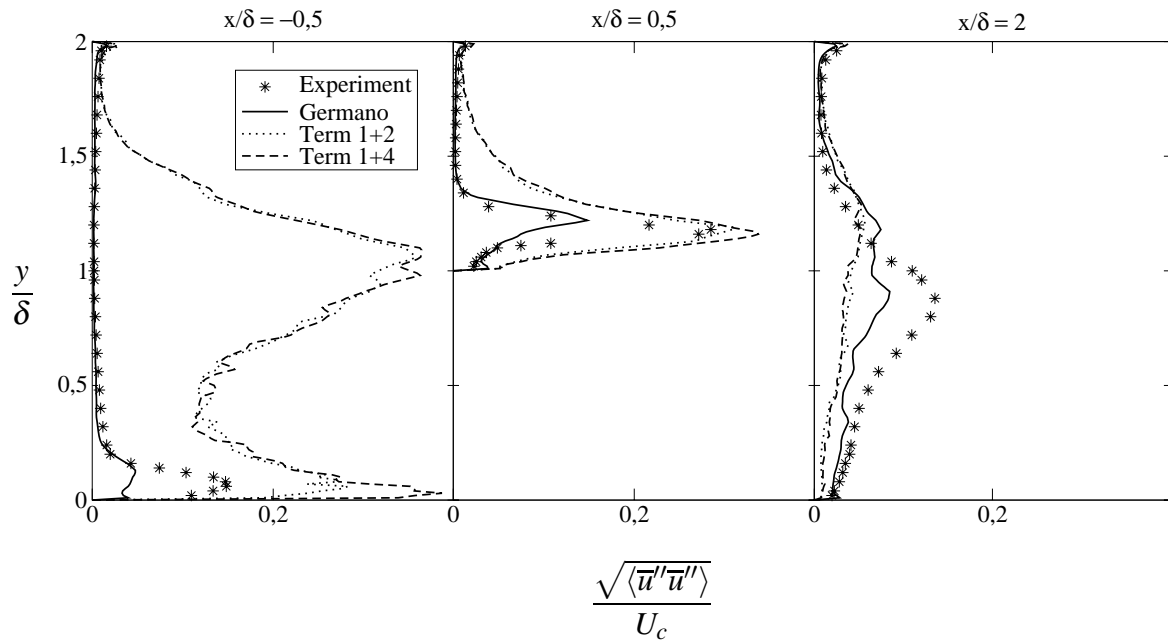


Abbildung 5.40: Gemittelte Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 0$

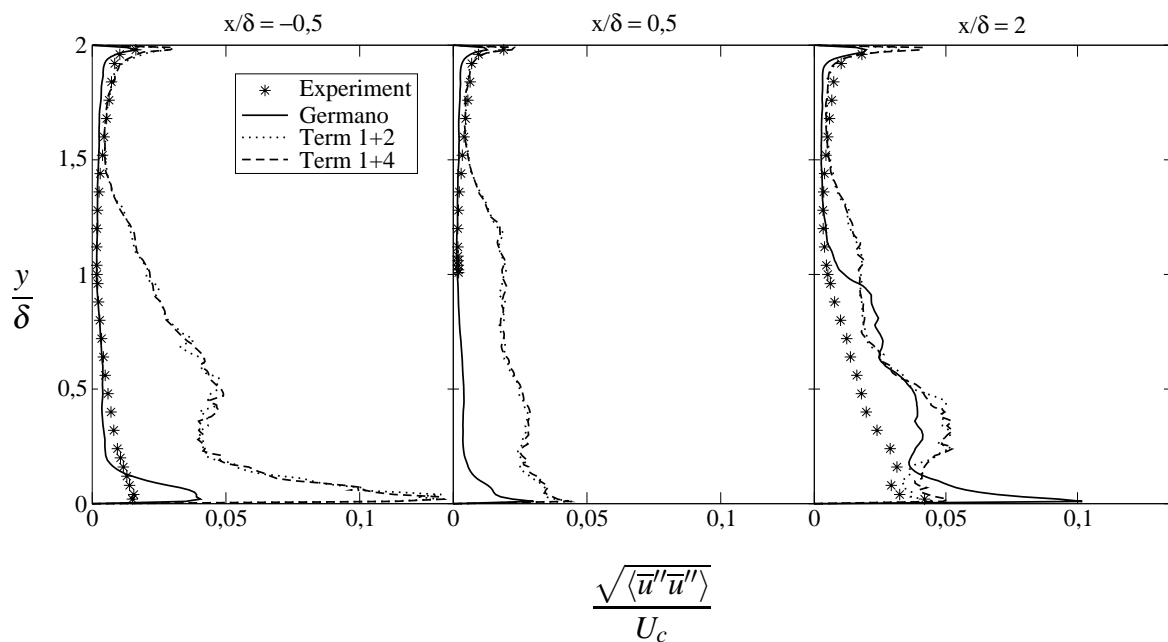


Abbildung 5.41: Gemittelte Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 1$

Phänomen ist erst bei höheren Reynoldszahlen zu beobachten. Das erklärt, warum die Doppelterm-Modelle bei den ersten beiden Testfällen, die deutlich geringere Reynoldszahlen aufwiesen, gute Ergebnisse erzielten.

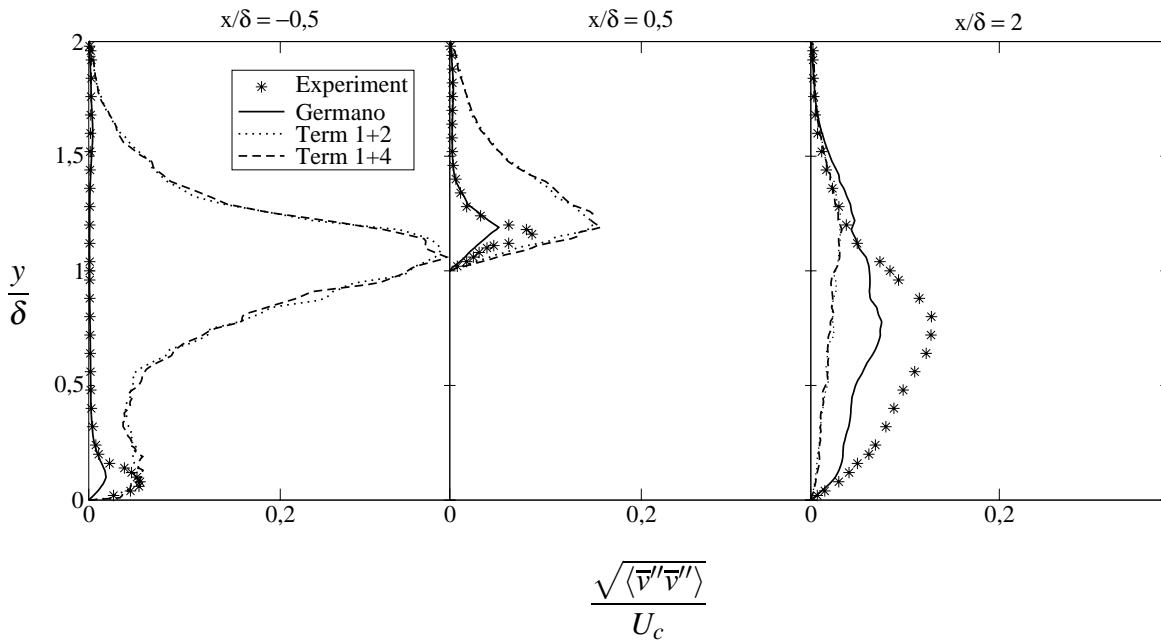


Abbildung 5.42: Gemittelte Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 0$

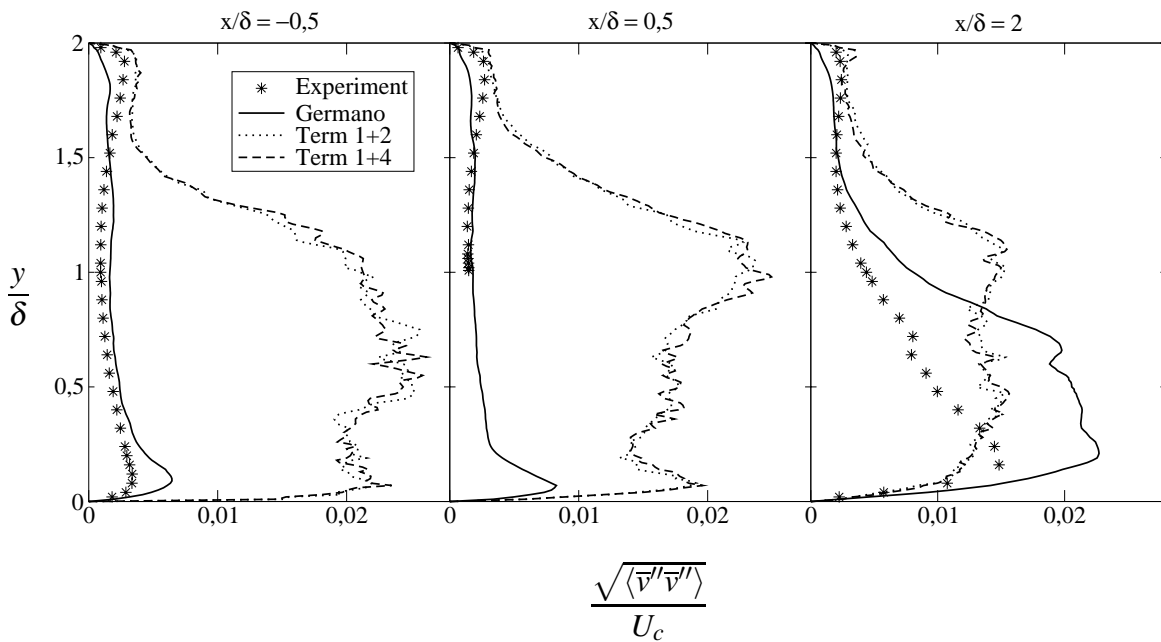


Abbildung 5.43: Gemittelte Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 1$

Durch die Hinzunahme eines zweiten Terms in das Modell wird die Konstante des Smagorinsky-Terms kleiner ermittelt als die Konstante des Germano-Modells. Diese Abminderung führt anscheinend dazu, dass die dissipative Wirkung des Modells zu stark reduziert wird.

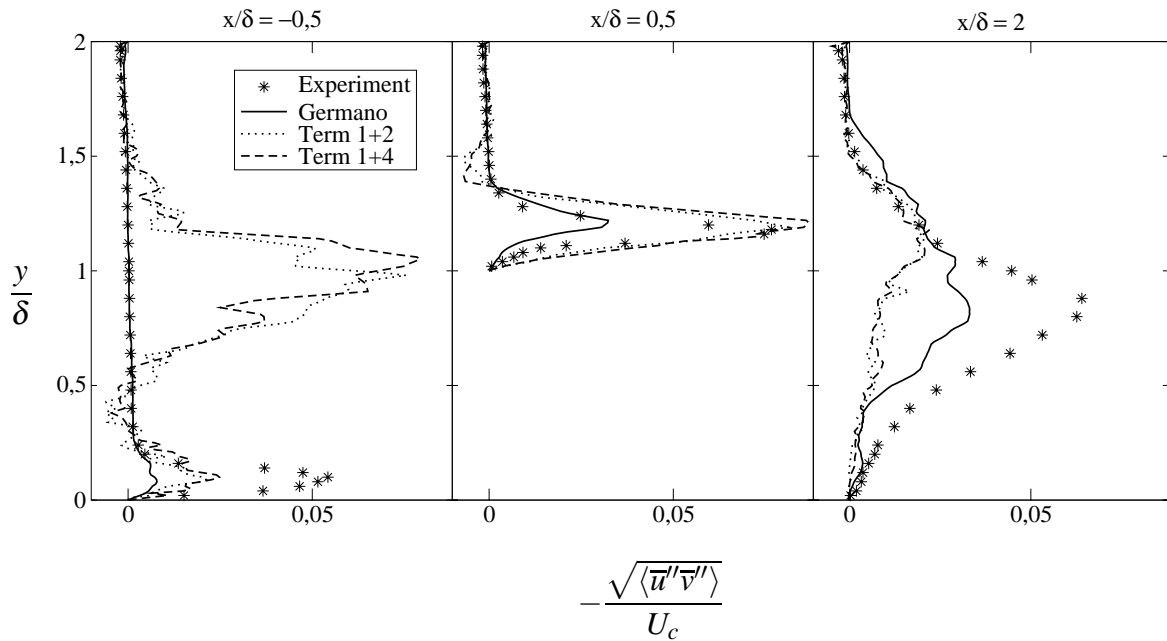


Abbildung 5.44: Gemittelte Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 0$

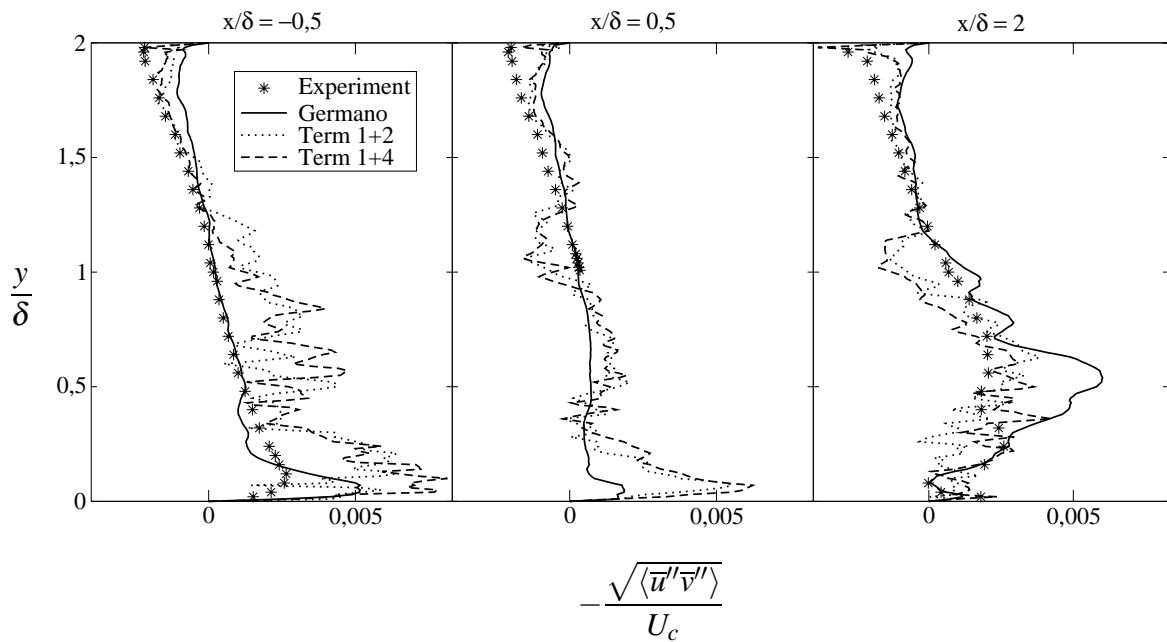


Abbildung 5.45: Gemittelte Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  für die Querschnitte  $x/\delta = -0,5, 0,5$  und  $2$  bei  $z/\delta = 1$

Eine weitere Ursache für die zu hohen Reynoldsspannungen kann eine ungenügende Reduktion der Schwankungen der Konstante durch die zeitliche Tiefpassfilterung sein. Die zu starken Schwankungen führen zu numerischen Instabilitäten, was sich in Oszillationen der Geschwindigkeiten ausdrückt und somit in diesen Bereichen zu erhöhten Reynoldsspannungen führt.

Lediglich über dem Dach des Würfels ist die Vorhersage der Reynoldsspannungen gut und hinter dem Würfel werden sogar zu geringe Reynoldsspannungen vorhergesagt. Das Germano-Modell zeigt für alle gewählten Querschnitte eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Nur seitlich, hinter dem Würfel ( $x/\delta = 2, z/\delta = 1$ ) kommt es auch bei diesem Modell zu einer Vorhersage von zu hohen Spannungen.

Die Beobachtungen die für die Reynoldsspannungen in Hauptströmungsrichtung gemacht wurden, treffen ebenfalls auf die Reynoldsspannungen in Wandnormalenrichtung zu, die in den Abbildungen 5.42 und 5.43 abgebildet sind. Auch hier sind die deutlich zu hohen Spannungen der Doppelterm-Modelle im Bereich des Hufeisenwirbels zu beobachten.

Für die Reynoldsspannungen  $-\langle u''v'' \rangle$  in den Abbildungen 5.44 und 5.45 ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei den Reynoldsspannungen in Hauptströmungs- und Wandnormalenrichtung. Die starken Schwankungen in den Profilen neben dem Würfel bei  $z/\delta = 1$  weisen auf die extremen Schwankungen bei den Geschwindigkeiten durch die Zunahme der turbulenten kinetischen Energie hin.

Die Ergebnisse zeigen ein deutliches Versagen der Doppelterm-Modelle für diesen Testfall mit einem verhältnismäßig groben Gitter, während das Germano-Modell eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreicht. Die sehr guten Ergebnisse der Doppelterm-Modelle für den Testfall der zurückspringenden Stufe konnten durch den Testfall des umströmten Würfels nicht bestätigt werden.



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden LES mit dynamischen Feinstrukturmodellen an turbulenten Strömungen in komplexen Geometrien durchgeführt. Ziel dabei war es, die Güte von neuen und modifizierten dynamischen Prozeduren und Feinstrukturmodellen im Vergleich zu herkömmlichen Methoden zu bestimmen. Dazu wurden neue Ansätze verfolgt und in ein bestehendes Programm zur Simulation von Strömungen implementiert. Mit diesem Programm wurden eine vollentwickelte turbulente Kanalströmung, eine Strömung über eine zurückspringende Stufe und die Umströmung eines wandgebundenen Würfels simuliert und ausgewertet.

Zunächst wurde die Turbulenz und ihre enorme Bedeutung für technische Strömungen diskutiert. Dabei wurden die Grundlagen der Turbulenz und die damit einhergehenden Effekte aufgezeigt. Die zur Beschreibung von turbulenten Strömungen notwendigen Grundgleichungen der Strömungsmechanik wurden präsentiert. Das durch die Nichtlinearität dieser Gleichung auftretende Schließungsproblem der Turbulenz wurde erläutert. Im Folgenden wurden die Grundlagen verschiedenen Verfahren der Simulation von turbulenten Strömungen beschrieben. Hierbei wurden die Vor- und Nachteile von der Direkten Numerischen Simulation, der Large-Eddy-Simulation und der statistischen Turbulenzmodellierung aufgezeigt.

Im Anschluss daran wurde näher auf die Methode der Large-Eddy-Simulation und ihre Elemente eingegangen. Die Filterung, die die Strömung in eine direkt zu simulierende Grobstruktur und eine zu modellierende Feinstruktur trennt, wurde detailliert beschrieben. Aus dieser Filterung wurden die gefilterten Grundgleichungen hergeleitet, die einen neuen Term mit dem unbekannten Feinstrukturspannungstensor enthalten. Dieser muss über ein Feinstrukturmodell modelliert werden. Die wichtigsten Modelle insbesondere das Smagorinsky-Modell wurden vorgestellt. Danach wurde detailliert auf die dynamischen Prozeduren eingegangen, die in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Hier wird die Modellkonstante aus bekannten Größen bestimmt. Er wird somit zeitlich und räumlich an die vorliegende Strömung angepasst. Das bekannteste dynamische Modell, das Germano-Modell, ermittelt eine stark schwankende Konstante, die zu numerischen Instabilitäten und einem erhöhten Modellfehler führt. Um dies zu verhindern wird die Konstante meist gemittelt.

Weiterhin wurden die *Ensemble Averaged Dynamic Procedure*, sowie das Energietransfer-Gleichgewichtsmodell und ein nichtlineares dynamisches Feinstrukturmodell detailliert hergeleitet und analysiert. In der *Ensemble Averaged Dynamic Procedure* werden die Modellkonstanten über äquivalente, aber statistisch unabhängige Simulationen gemittelt und somit ihre Schwankungen reduziert. Das dynamische Energietransfer-Gleichgewichtsmodell basiert auf der Annahme eines Gleichgewichts des Energietransfers zwischen verschiedenen Skalen des Energiespektrums der turbulenten Strö-

mung. Basierend auf dem nichtlinearen Modell von Lund & Novikov (1992) wurden dynamische Varianten des Modells vorgestellt, die nicht alle fünf Terme enthalten, sondern nur bis zu zwei davon.

Das Programm FASTEST wurde um die zuletzt angesprochenen Modelle erweitert, um Simulation mit diesen Modellen durchzuführen. Das Programm FASTEST ist ein Strömungslöser basierend auf der Finiten Volumen Methode. Für die Simulationen kam das Zentralknotenverfahren zur Anwendung. Zur Zeitintegration wurde das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet. Als Druck-Korrekturverfahren wurde das SIMPLE-Verfahren eingesetzt.

Anhand der ebenen Kanalströmung wurde der Einfluss der Gitterauflösung sowie der Einfluss des Germano-Modells auf die Simulationsergebnisse diskutiert. Die *Ensemble Averaged Dynamic Procedure* wurde erstmals an einer wandgebundenen Strömung getestet. Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen wurden auch für diese Strömung bestätigt. Es reicht eine Mittelung der dynamischen Konstante über 8 - 16 parallel laufende Simulationen aus, um mit einer Mittelung über homogene Richtungen vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Das Energietransfer-Gleichgewichtsmodell lieferte für diese Strömung eine im Mittel geringere dynamische Konstante als das Germano-Modell, welches als zu dissipativ bekannt ist. Dies führte zu guten Ergebnissen für die Kanalströmung. Eine Anwendbarkeit dieses Modells in komplexen Geometrien ist jedoch nicht gegeben, da die Standardabweichung der ermittelten dynamischen Konstanten noch höher lag als bei dem Germano-Modell. Die fünf Einzelterm-Modelle des dynamischen nichtlinearen Modells lieferten vergleichbare Ergebnisse, doch einige der untersuchten Doppelterm-Modelle zeigten verbesserte Ergebnisse gegenüber dem Germano-Modell. Die Bestimmung zweier gekoppelter dynamischer Konstanten verringerte signifikant die Schwankungen der einzelnen Konstanten.

Die Untersuchung ausgesuchter Doppelterm-Modelle an einer zurückspringenden Stufe bei niedriger Reynoldszahl zeigte eine geringe Auswirkung auf die mittleren Strömungsprofile der Simulationen. Das Germano-Modell sowie die Doppelterm-Modelle zeigten hier eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Eine deutliche Verbesserung zeigte sich jedoch bei den Reynoldsspannungen durch die Hinzunahme eines zweiten Terms zu dem Smagorinsky-Term. Die reduzierten Schwankungen der Modellkonstanten bei den Doppelterm-Modellen führten nicht zu einer Verbesserung des Konvergenzverhaltens. Bei manchen der Modelle musste trotz der Mittelung über eine homogene Richtung ein Clipping eingeführt werden um Konvergenz zu erreichen.

Die Umströmung eines an der Wand eines Kanals montierten Würfels bei hoher Reynoldszahl wurde als letzter Testfall mit den Doppelterm-Modellen simuliert. Hier kam es zu einem Versagen der beiden ausgewählten Modelle. Während das Germano-Modell eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zeigte, ermittelten die Doppelterm-Modelle deutlich zu hohe Reynoldsspannungen im Bereich des Hufeisenwirbels um den Würfel. Dies deutet entweder auf eine zu geringe dissipative Wirkung dieser Modelle hin, die bei hohen Reynoldszahlen zu einer Akkumulation

von turbulenter kinetischer Energie führen, oder auf numerische Stabilitätsprobleme infolge ungenügender Reduktion der Schwankungen der dynamischen Konstanten durch die verwendete zeitliche Tiefpassfilterung. Das Germano-Modell lieferte bei dieser verhältnismäßig groben Gitterauflösung hingegen zufriedenstellende Ergebnisse.

Hier zeigte sich, dass auch im LES-Kontext gute Ergebnisse eines Feinstrukturmodells in einigen Testfällen nicht auf weitere komplexere Testfälle übertragbar sind. Erst bei hohen Reynoldszahlen zeigt sich, ob ein Modell die Eigenschaft der "Energieerhaltung" besitzt. In der Vergangenheit waren Testfälle für Feinstrukturmodelle aufgrund geringer Rechenleistung meist mit niedrigen Reynoldszahlen verbunden. Erfahrungen zeigen, dass jedoch auch Testfälle mit hohen Reynoldszahlen notwendig sind, um Rückschlüsse auf die Güte eines Feinstrukturmodells zu schließen.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass die in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse nur im Zusammenhang mit dem verwendeten numerischen Lösungsverfahren zu sehen sind. Untersuchungen haben gezeigt, dass das numerische Verfahren einen großen Einfluss auf die Ergebnisse von Grobstruktursimulationen hat. Durch die Diskretisierung der Grundgleichung ergibt sich ein Diskretisierungsfehler, ebenso ist aufgrund des Feinstrukturmodells ein Modellfehler vorhanden. Diese beiden Fehler können nicht getrennt voneinander betrachtet werden. Sie können sich z. B. aufsummieren und zu einem schlechten Ergebnis führen, oder sie können sich idealerweise gegenseitig aufheben. Erst Simulationen mit den hier verwendeten Modellen und unterschiedlichen numerischen Lösungsverfahren können endgültig Aufschluss über die Güte der Modelle geben.

Abschließend stellt sich die Frage, ob der numerische Mehraufwand, der für komplexere Modelle anfällt, nicht besser eingespart werden sollte und in eine Verfeinerung des Gitters investiert werden sollte. Denn mit immer feiner werdendem Gitter nähert man sich automatisch dem Ergebnis einer Direkten Numerischen Simulation.



## 7 Literaturverzeichnis

- ADAMS, N. A. (2000): Deconvolution Methods for Large-Eddy Simulation. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, EC-COMAS 2000, Barcelona, Spain, Sept. 11-14.
- AKSELVOLL, K., MOIN, P. (1993): Large Eddy Simulation of Backward Facing Step Flow. In: *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, W. Rodi, F. Martelli, Herausgeber, Elsevier, 303–313.
- BARDINA, J., FERZIGER, J. H., REYNOLDS, W. C. (1980): Improved Sub-grid Scale Models for Large Eddy Simulation. *AIAA-paper 80*, 1357.
- BOLLRICH, G. (2000): *Technische Hydromechanik 1*. Verlag Bauwesen, Fünfte Aufl..
- BOUSSINESQ, J. (1877): Memoire sur l'influence des frottements dans les mouvementsreguliers des fluids. *J. Math. Pures Appl.* 13, 377–424.
- BREUER, M. (2001): *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Habilitation, Fachgebiet Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.
- CARATI, D., GHOSAL, S., MOIN, P. (1995): On the representation of backscatter in dynamic localization models. *Phys. Fluids Vol. 7*, No. 3, 606–616.
- CARATI, D., ROGERS, M., WRAY, A. (2002): Statistical ensemblement of large-eddy simulations. *J. Fluid Mech. Vol. 455*, 195–212.
- CHOLLET, J. P., LESIEUR, M. (1981): Parameterization of Small Scales of Three-Dimensional Isotropic Turbulence Utilizing Spectral Closures. *J. of Atmos. Sci. Vol. 38*, 2747–2757.
- CLARK, R., FERZIGER, J. H., REYNOLDS, W. C. (1979): Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech. Vol. 91*, 1–16.
- COMTE, P., LEE, S., CABOT, W. (1990): A Subgrid-Scale Model Based on the Second-Order Velocity Structure Function. *Center For Turbulence Research - Proceedings of the Summer Programm 1990*.
- DEARDORFF, J. W. (1971): The Use of Subgrid Transport Equations in a Three-Dimensional Model of Atmospheric Turbulence. *J. of Comput. Physics Vol. 7*, 120–133.
- DEARDORFF, J. W. (1973): The Use of Subgrid Transport Equations in a Three-Dimensional Model of Atmospheric Turbulence. *J. of Fluids Engineering Vol. 95*, 429–438.

- DUCROS, F., COMTE, P., LESIEUR, P. (1996): Large Eddy Simulation of Transition Turbulence in a Boundary Layer Developing over a Flat Plate. *J. Fluid Mech. Vol. 326*, 412–426.
- FERZIGER, J. H. (1996): Large Eddy Simulation. In: *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*, T. B. Gatski, M. Y. Hussaini, J. L. Lumley, Herausgeber, Oxford University Press, 109–154.
- FERZIGER, J. H., PERIĆ, M. (2002): *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Dritte Aufl.
- FUREBY, C., BENSOW, R., PERSSON, T. (2005): Scale Similarity Revisited in LES. 4th. International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Williamsburg, VA USA, Bd. 3, 1077–1082.
- FUREBY, C., TABOR, G. (1997): Mathematical and Physical Constraints on Large-Eddy Simulations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics Vol. 9*, 85–102.
- FUREBY, C., TABOR, G., WELLER, H., GOSMAN, A. (1997): Differential subgrid stress models in large eddy simulations. *Phys. Fluids Vol. 9*, No. 11, 3578–3580.
- GATSKI, T. B., SPEZIALE, C. G. (1993): On Explicit Algebraic Stress Models for Complex Turbulent Flows. *J. Fluid Mech. Vol. 254*, 59–78.
- GERMANO, M. (1992): Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech. Vol. 238*, 325–336.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., CABOT, W. (1991): A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids Vol. 3*, No. 7, 1760–1765.
- GEURTS, B. J. (2003): *Elements of direct and large-eddy simulation*. R. T. Edwards.
- GHOSAL, S., LUND, T. S., MOIN, P. (1992): A Local Dynamic Model for Large Eddy Simulation. *Center of Turbulence Research - Annual Research Briefs 1992*, 3–25.
- GHOSAL, S., LUND, T. S., MOIN, P., AKSELVOLL, K. (1995): A Dynamic Localization Model for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. *J. Fluid Mech. Vol. 286*, 229–255.
- GHOSAL, S., MOIN, P. (1995): The Basic Equations for the Large Eddy Similarity of Turbulent Flows in Complex Geometry. *J. Comput. Phys.*, No. 118, 24–37.
- GULLBRAND, J., CHOW, F. (2003): The effect of numerical errors and turbulence models in large-eddy simulations of channel flow, with and without explicit filtering. *J. Fluid Mech. Vol. 495*, 323–341.
- JOHANSSON, A. V. (2002): Engineering Turbulence Models and their Development, with Emphasis on Explicit Algebraic Reynolds Stress Models. In: *Theories of Turbulence*, M. Oberlack, F. Busse, Herausgeber, Springer Verlag.
- JOHANSSON, A. V., HALLBÄCK, M. (1994): Modelling of rapide pressure-strain in Reynolds-stress closures. *J. Fluid Mech. Vol. 269*, 143–168.

- KIM, J., MOIN, P., MOSER, R. D. (1987): Turbulence statistics in a fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech. Vol. 177*, 133–166.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941a): Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 32*, 16–18.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941b): The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluids for Very Large Reynolds Numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 30*.
- KOLMOGOROV, A. N. (1942): Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 6*, 56–58.
- KOSOVIC, B. (1997): Subgrid-scale modelling for the large-eddy simulation of high-Reynolds-number boundary layers. *J. Fluid Mech. Vol. 336*, 151–182.
- LAFEVER, M. (1987): *Numerical and physical aspects of large eddy simulation of turbulent flows*. Dissertation, Technische Universiteit Delft.
- LAUNDER, B. E., SPALDING, D. B. (1972): *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London and New York.
- LEITH, C. E. (1990): Stochastic Backscatter in a Subgrid-Scale Model: Plane Shear Mixing Layer. *Phys. Fluids Vol. 2*, No. 3, 297–299.
- LELE, S. K. (1993): Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution. *J. of Comput. Physics Vol. 103*, 16–42.
- LESIEUR, M., METAIS, O. (1996): New Trends in Large-eddy Simulations of Turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 28*, 45–82.
- LESLIE, D., QUARINI, G. (1979): The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedures. *J. Fluid Mech. Vol. 91*, 65–91.
- LILLY, D. (1992): A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids Vol. 4*, No. 3, 633–635.
- LUND, T. S., NOVIKOV, E. A. (1992): Parameterization of subgrid-scale stress by the velocity gradient tensor. *Center For Turbulence Research - Annu. Res. Briefs 1992*, 27–43.
- MARTINUZZI, R. (1992): *Experimentelle Untersuchung der der Umströmung von nad-gebundener, rechteckiger, prismatischer Hindernisse*. Dissertation, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen-Nürnberg.
- MASON, P., CALLEN, N. (1986): On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulations of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech. Vol. 162*, 439–462.
- MASON, P., THOMSON, D. (1992): Stochastic Backscatter in Large Eddy Simulation of Boundary Layers. *J. Fluid Mech. Vol. 242*, 51–78.
- MCMILLAN, O. J., FERZIGER, J. H. (1979): Direct testing of subgrid-scale models. *AIAA J. 17*, 1340.

- MENEVEAU, C., LUND, T. S. (1994): On the Lagrangian nature of the turbulence energy cascade. *Phys. Fluids Vol. 6*, No. 8, 2820–2825.
- MENEVEAU, C., LUND, T. S., CABOT, W. (1996): A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *Center For Turbulence Research - Proceedings of the Summer Programm 1994*, 271–299.
- MÉTAIS, O., LESIEUR, M. (1992): Spectral Large Eddy Simulation of Isotropic and Stably-Stratified Turbulence. *J. Fluid Mech. Vol. 239*, 157–194.
- MOIN, P., JIMENÉZ, J. (1993): Large Eddy Simulation of Complex Turbulent Flows. AIAA 24th Fluid Dynamics Conf., Orlando, Florida, (1993), 93-3099.
- MOIN, P., KIM, J. (1982): Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech. Vol. 118*, 341–377.
- MOSER, R. D., KIM, J., MANSOUR, N. N. (1999): Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Phys. Fluids Vol. 11*, No. 4, 943–945.
- MUROTA, T. (2003): A Dynamic Subgrid Scale Model of Eddy Viscosity Type Deduced from a Local Inter-Scale Equilibrium Assumption of Energy Transfer. *3rd Symposium on Turbulent Shear Flows Phenomena 1*, 425–430.
- OBERLACK, M. (1997): Invariant modelling in large-eddy simulation of turbulence. *Center for Turbulence Research - Annual Research Briefs 1997*, 3–22.
- OBERLACK, M. (2000): *Symmetrie, Invarianz und Selbstähnlichkeit in der Turbulenz*. Habilitation, Inst. f. Techn. Mechanik, RWTH Aachen.
- PEARSON, J. (1959): The effect of uniform distortion on weak homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech. Vol. 5*, 274–288.
- PIOMELLI, U., MOIN, P., FERZIGER, J. H. (1988): Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows. *Phys. Fluids Vol. 31*, No. 7, 1884–1891.
- POPE, S. (1975): A more general effective-viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech. Vol. 72*, part 2, 331–340.
- POPE, S. (2000): *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- RAZAFINDRALANDY, D. (2005): *Contribution a l'étude Mathématique et numérique de la simulation des Grandes Echelles*. Dissertation, Université de La Rochelle.
- RAZAFINDRALANDY, D., HAMDOUNI, A. (2006): Consequences of symmetries on the analysis and construction of turbulence models. *SIGMA Vol. 02*.
- RHIE, C., CHOW, W. (1983): Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal Vol. 21*, No. 11.
- RICHARDSON, L. (1922): *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press.



- RISTORCELLI, J., LUMLEY, J., ABID, R. (1995): A Rapid-Pressure Covariance Representation Consistent with the Taylor-Proudman Theorem Materially Frame Indifferent in the Two-Dimensional Limit. *J. Fluid Mech. Vol. 292*, 111–152.
- ROGALLO, R. S., MOIN, P. (1984): Numerical Simulation of Turbulent Flows. *Ann. Rev. Fluid. Mech 16*, 99–137.
- RONCHI, C., YPMA, M., CANUTO, V. (1992): On the application of the Germano identity to subgrid-scale modeling. *Phys. Fluids Vol. 4*, No. 12, 2927–2929.
- SADIKI, A. (1998): *Turbulenzmodellierung und Thermodynamik*. Habilitation, Technische Universität Darmstadt.
- SAGAUT, P. (2001): *Large eddy simulation for incompressible flows*. Springer-Verlag, Zweite Aufl..
- SCHÄFER, M. (1999): *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag.
- SCHUMANN, U. (1975): Subgrid scale Model Finite Difference Simulations fo Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *J. Comput. Phys. Vol. 18*, 376–404.
- SCHUMANN, U. (1977): Realizability of Reynolds Stress Turbulence Models. *Phys. Fluids Vol. 20*, 721–725.
- SCHUMANN, U. (1995): Stochastic Backscatter of Turbulence Energy and Scalar Variance by Random Subgrid-Scale Fluxes. *Proc. Roy. Soc. London A Vol. 451*, 293–318 und 811.
- SCHUMANN, U., FRIEDRICH, R. (1987): On Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence. In: *Advances in Turbulence*, G. Comte-Bellot, J. Mathieu, Herausgeber, Springer Verlag, 88–104.
- SJÖGREN, T., JOHANSSON, A. V. (2000): Development and calibration of algebraic nonlinear models for terms in the Reynolds stress transport equation. *Phys. Fluids Vol. 12*, No. 6, 1554–1572.
- SMAGORINSKY, J. (1963): General Circulation Experiments with the Primitive Equations. *Mon. Weath. Rev. 91*, 99–164.
- SPEZIALE, C. G. (1985): Galilean Invariance of Subgrid-Scale Stress Models in the Large-Eddy Simulation of Turbulence. *J. Fluid Mech. Vol. 156*, 55–62.
- SPEZIALE, C. G. (1987): On nonlinear k-l and k-e models of turbulence. *J. Fluid Mech. Vol. 178*, 459–475.
- SPURK, J. H. (1996): *Strömungslehre. Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer Verlag.
- STOLZ, S., ADAMS, N., KLEISER, L. (2001a): An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows. *Phys. Fluids Vol. 13*, No. 4, 997–10145.

- STOLZ, S., ADAMS, N., KLEISER, L. (2001b): The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent-boundary-layer interaction. *Phys. Fluids Vol. 13*, No. 10, 2985–3001.
- STONE, H. (1968): Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *J. Numer. Anal. 5*, 530–558.
- VASILYEV, O. V., GOLDSTEIN, D. E. (2004): Local spectrum of commutation error in large eddy simulations. *Phys. Fluids Vol. 16*, No. 2, 470–473.
- VASILYEV, O. V., LUND, T. S., MOIN, P. (1998): A general class of commutative filters for LES in complex geometries. *Journal Comput. Phys. Vol. 146*, 82–104.
- VAN DER VEN (1995): A family of large-eddy simulation (LES) filters with nonuniform filter widths. *Phys. Fluids Vol. 7*, No. 5, 1171–1172.
- VREMAN, B., GEURTS, B., KUERTEN, H. (1994): On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model. *Phys. Fluids Vol. 6*, No. 12, 4057–4059.
- WANG, B., BERGSTROM, D. (2005): A dynamic nonlinear subgrid-scale stress model. *Phys. Fluids Vol. 17*, No. 3, 1–15.
- WILCOX, C. D. (1993): *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., California, USA.
- WINCKELMANS, G., JEANMART, H., CARATI, D. (2002): On the comparison of turbulence intensities from large-eddy simulation with those from experiment or direct numerical simulation. *Phys. Fluids Vol. 14*, No. 5, 1809–1811.
- YOSHIOKA, S., OBI, S., MASUDA, S. (2001a): Organized vortex motion in periodically perturbed turbulent separated flow over a backward-facing step. *Int. J. Heat and Fluid Flow Vol. 22*, 301–307.
- YOSHIOKA, S., OBI, S., MASUDA, S. (2001b): Turbulence statistics of periodically perturbed turbulent separated flow over a backward-facing step. *Int. J. Heat and Fluid Flow Vol. 22*, 393–401.
- YOSHIKAWA, A. (1982): A statistically-derived subgrid model for the large-eddy simulation of turbulence of a transport equation for the kinetic energy dissipation rate. *Phys. Fluids Vol. 25*, No. 9, 1532–1537.
- YOSHIKAWA, A. (1986): Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. *Phys. Fluids Vol. 29*, No. 7, 2152–2164.
- ZANG, Y., STREET, R. L., KOSEFF, J. R. (1993): A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows. *Phys. Fluids Vol. 5*, No. 12, 3186–3196.

# Lebenslauf

Ingmar Wendling

**Persönliche Daten:**

Geburtsdatum: 19. April 1976

Geburtsort: Lich

Staatsangehörigkeit: deutsch

Familienstand: verheiratet

**Schulbildung:**

09/82 - 09/86 Korczak-Schule in Gießen

09/86 - 09/88 Pestalozzi-Schule in Gießen

09/88 - 07/95 Liebig-Schule in Gießen

Abschluss: Abitur

**Wehrdienst:**

07/95 - 05/96 Grundwehrdienst in Schwarzenborn

**Studium:**

10/96 - 01/03 Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Darmstadt

Zwischenprüfung: Vordiplom

Abschluss: Diplom

**Berufliche Tätigkeit:**

02/03 - 01/07 Promotionstudent am Fachgebiet für Strömungsdynamik  
der Technischen Universität Darmstadt